

Федеральное агентство по образованию  
Дальневосточный государственный технический университет  
(ДВПИ им. В.В. Куйбышева)

Н.П. Дымченко, И.А. Терлецкий

**Физика**

**Часть 3**

**Колебания и волны. Волновая оптика**

**Учебно-методическое пособие для студентов-заочников технических  
специальностей вузов**

*Рекомендовано Дальневосточным учебно-методическим советом в качестве  
учебно-методического пособия для студентов технических вузов региона*

Владивосток ·2006

Одобрено редакционно-издательским советом ДВГТУ

УДК 621.371 → 537.86/87

Д 88

Дымченко Н.П. Физика. Ч. 3. Колебания и волны. Волновая оптика: Учеб.– метод. пособие/  
Н.П. Дымченко, И.А. Терлецкий.– Владивосток: Изд-во ДВГТУ.–2006.– 173 с.

ISBN Д

Пособие содержит основные представления о механических и электромагнитных колебаниях. Показана аналогия в описании колебательных процессов разной природы. Рассмотрены закономерности образования и распространения механических и электромагнитных волн, рассмотрены физические основы таких оптических явлений, как интерференция, дифракция, поляризация, дисперсия и поглощение света, элементы геометрической оптики.

В пособии даются методические рекомендации по решению задач по указанным разделам курса физики, приводятся примеры решения задач, а также представлены задания для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов заочного обучения технических специальностей.

Рецензенты:

кафедра физики Тихоокеанского военного морского института им. С.О. Макарова (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук проф. В.Э. Осуховский);

В.В. Юдин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Дальневосточный государственный университет)

ISBN

© Н.П. Дымченко,  
И.А. Терлецкий, 2006

© ДВГТУ, изд-во ДВГТУ, 2006

## Введение

Известно, что наиболее продуктивное изучение курса физики, позволяющее глубже понять сущность физических законов, процессов и явлений, достигается при рациональном сочетании изучения теоретического материала и решения физических задач по соответствующему разделу курса физики, а также выполнения физического практикума.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для оказания помощи студентам-заочникам технических специальностей ДВГТУ в изучении курса физики и в первую очередь в решении физических задач.

В соответствии с учебными планами технических специальностей ДВГТУ и рабочей программой весь курс физики разбит на четыре раздела:

- 1) механика, молекулярная физика и термодинамика;
- 2) электродинамика;
- 3) колебания и волны, волновая оптика;
- 4) квантовая физика, физика твердого тела, ядерная физика.

Изучение каждого из этих разделов курса поддерживается соответствующим лабораторным практикумом и четырьмя контрольными работами. Данное пособие ориентируется в первую очередь на методическое обеспечение выполнения контрольной работы по третьему разделу курса физики: «Колебания и волны. Волновая оптика». Оно может быть использовано и для подготовки к экзаменам.

Данное пособие может быть также использовано при изучении соответствующих разделов курса физики и студентами других вузов, где распределение учебного материала отличается от указанного.

В соответствии с указанной выше целью и построено содержание учебно-методического пособия. В нем рассматриваются узловые вопросы данного раздела курса физики, даны методические рекомендации по решению типов задач, представленных в контрольной работе № 3, приводятся по каждой теме примеры решения задач, а также даны задачи для самостоятельного решения.

Для удобства студентов задачи для самостоятельного решения сгруппированы по темам.

Учитывая ограниченный объем пособия, мы сочли своим долгом указать на ряд учебных пособий, в которых также рассматриваются технологии решения физических задач. Кроме того, для более полного изучения материала, не охваченного в рамках данного пособия, но входящего в программу курса физики технического вуза и необходимого для подготовки к семестровым экзаменам по физике, мы указали также несколько учебных пособий, которые могут оказаться полезными при освоении теоретического материала (см. библиографический список).

## Общие методические указания

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом. Для облегчения этой работы кафедра физики организует чтение лекций, практические занятия и лабораторные работы. Поэтому процесс изучения физики состоит из следующих этапов:

- 1) проработка установочных и обзорных лекций;
- 2) самостоятельная работа над учебниками и учебными пособиями;
- 3) выполнение контрольных работ;
- 4) прохождение лабораторного практикума;
- 5) сдача зачетов и экзаменов.

Важнейшим элементом самостоятельной работы студентов–заочников является выполнение контрольных работ. В процессе изучения физики студент должен выполнить четыре контрольные работы.

Таблица к контрольной работе № 3

Вариант	Номера задач									
1	301	311	321	331	341	351	361	371	381	391
2	302	312	322	332	342	352	362	372	382	392
3	303	313	323	333	343	353	363	373	383	393
4	304	314	324	334	344	354	364	374	384	394
5	305	315	325	335	345	355	365	375	385	395
6	306	316	326	336	346	356	366	376	386	396
7	307	317	327	337	347	357	367	377	387	397
8	308	318	328	338	348	358	368	378	388	398
9	309	319	329	339	349	359	369	379	389	399
10	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400

Решение задач контрольных работ является проверкой степени усвоения и закрепления студентом теоретического курса, а рецензии на работу помогают ему доработать и правильно освоить различные разделы курса физики.

Прежде чем приступать к решению конкретной задачи, рекомендуем изучить соответствующий теоретический материал, просмотреть примеры решения задач по данной теме, познакомиться со справочными материалами, приведенными, например, в пособии [6], см. библиографический список на странице 7, а затем приступать к выполнению контрольной работы.

Контрольные работы содержат каждая по десять задач. Вариант задания контрольной работы определяется в соответствии с последней цифрой шифра зачетной книжки по таблице для контрольных работ № 3.

Если, например, последняя цифра 5, то в контрольных работах студент решает задачи 305, 315, 325, 335, 345, 355, 365, 375, 385, 395.

При выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила :

- 1) указывать на титульном листе номер контрольной работы, наименование дисциплины, фамилию и инициалы студента, шифр зачетной книжки и домашний адрес;
- 2) контрольную работу следует выполнять аккуратно, оставляя поля для замечаний рецензента;
- 3) задачу своего варианта переписывать полностью, а заданные физические величины выписать отдельно, при этом все необходимые числовые значения величин должны быть выражены в системе СИ;
- 4) для пояснения решения задачи там, где это нужно, аккуратно сделать чертеж;
- 5) решение задачи и используемые формулы должны сопровождаться пояснениями;
- 6) в пояснениях к задаче необходимо указывать те основные законы и формулы, на которых базируется решение данной задачи;
- 7) при получении расчетной формулы для решения конкретной задачи приводить ее вывод;
- 8) задачу рекомендуется решить сначала в общем виде, т. е. только в буквенных обозначениях, поясняя физический смысл используемых обозначений, и только затем переходить к расчетам;
- 9) вычисления следует проводить с помощью подстановки заданных числовых величин в расчетную формулу; при этом следует руководствоваться правилами приближенных вычислений [6, с. 470–471];
- 10) константы физических величин и другие справочные данные для уменьшения погрешностей вычислений следует выбирать из таблиц на порядок выше, чем числовые значения, приводимые в условиях задач;
- 11) проверить единицы полученных величин по расчетной формуле и тем самым подтвердить ее правильность.

Контрольные работы, оформленные без соблюдения указанных правил, а также работы, выполненные не по своему варианту, не зачитывают.

При отсылке работы на повторное рецензирование обязательно представлять работу с первой рецензией.

## **Рабочая программа раздела «Колебания и волны. Волновая оптика»**

**Гармонические колебания.** Уравнение гармонических колебаний. Упругая и квазиупругая сила. Уравнение движения пружинного маятника, его решение. Амплитуда, круговая частота, фаза гармонического колебания. Векторная диаграмма. Энергия гармонического колебания. Математический маятник. Физический маятник. Колебательный контур.

Сложение одинаково направленных колебаний одной частоты, близких частот, кратных частот. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.

**Колебания при наличии трения.** Колебания пружинного маятника с трением. Дифференциальное уравнение его движения. Решение уравнения. Коэффициент затухания. Логарифмический декремент. Добротность. Период затухающих колебаний.

**Электромагнитные колебания.** Свободные затухающие колебания в колебательном контуре. Дифференциальное уравнение и его решение. Характеристики затухания. Автоколебания.

Вынужденные колебания осциллятора под действием внешней синусоидальной силы. Дифференциальное уравнение и его решение. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс.

Вынужденные электромагнитные колебания. Частотные зависимости амплитуд тока, напряжений, сдвига фаз между током и напряжением. Параметрический резонанс.

**Волновое движение.** Продольные и поперечные волны. Скорость распространения волнового фронта. Уравнение плоской бегущей волны. Длина волны, волновое число. Волновое уравнение. Плотность потока энергии (вектор Умова). Интенсивность волны.

**Стоячие волны.** Уравнение стоячей волны. Узлы и пучности стоячей волны. Собственные колебания стержней и струн. Звуковые волны. Высота, тембр, громкость звука. Эффект Доплера. Ультразвук. Ударные волны.

**Электромагнитные волны.** Уравнение плоской электромагнитной волны. Волновое уравнение. Фазовая скорость электромагнитных волн. Вектор Умова – Пойнтинга. Источники электромагнитных волн. Шкала электромагнитных волн.

**Волновая оптика.** Геометрическая оптика. Закон отражения и преломления света. Полное отражение света. Преломление света в призме. Формула линзы. Построение изображения в линзах.

**Интерференция волн.** Когерентность волн. Методы получения когерент-

ных источников света и наблюдения интерференции. Общие условия интерференционных максимумов и минимумов света двух когерентных волн. Интерференционные полосы от двух щелей на плоском экране (метод Юнга). Интерференция в тонких пленках. Полосы равного наклона. Полосы равной толщины. Кольца Ньютона. Просветление оптики. Интерферометры.

**Дифракция света.** Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракция Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция на круглом отверстии и диске. Дифракция Фраунгофера на щели и на дифракционной решетке. Спектральное разложение. Разрешающая способность спектральных приборов.

Дифракция рентгеновских лучей. Формула Вульфа-Брэгга.

**Поляризация света.** Естественный и поляризованный свет. Поляризаторы. Закон Малюса. Поляризация света при отражении и преломлении света. Закон Брюстера. Поляризация света при двойном лучепреломлении. Поляризационные призмы и поляроиды. Искусственная оптическая анизотропия. Эффект Керра. Оптическая активность. Вращение плоскости поляризации. Эффект Фарадея.

**Взаимодействие электромагнитных волн с веществом.** Дисперсия света. Нормальная и аномальная дисперсия. Элементарная электронная теория дисперсии. Поглощение света. Закон Бугера. Рассеяние света.

### **Библиографический список**

1. Трофимова Т.И. Курс физики: Учебное пособие для вузов. –4-е изд., испр.– М.: Высш. шк., 2005 – 542 с.
2. Трофимова Т.И., Фирсов А.В. Курс физики. Колебания и волны. Теория, задачи и решения.– М.: Изд. центр «Академия», 2003.– 256 с.
3. Трофимова Т. И., Павлова З. Г. Сборник задач по курсу физики с решениями. – 3-е изд., стереотип.– М.: Высш. шк., 2002.–591 с.
4. Гладской В.М., Самойленко П.И. Сборник задач по физике с решениями.– М.: Дрофа, 2002.– 288 с.
5. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики: Учебное пособие.– М: Высш. шк.,1977.–351 с.
6. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике: Учебное пособие.–5-е изд. перераб. и доп.– М.: Высш. шк., 1988.– 527 с.
7. Новодворская Е.М., Дмитриев Э.М. Методика проведения упражнений по физике во втузе: Учебное пособие.–3-е изд., перераб. и доп.– М.: Высш. шк., 1981.–318 с.
8. Решение задач по физике: Учебное пособие/ В.М. Кириллов, В.А. Давыдов, А.А. Задерновский и др.– М.: Эдиториал УРСС, 2000.–224 с.

## Колебания и волны. Волновая оптика

Данный раздел предполагает краткое изложение вопросов теоретического курса, которые необходимы для решения задач, приведенных в конце настоящего пособия.

### 1. Механические колебания

Колебаниями называются повторяющиеся процессы. С колебательными процессами мы встречаемся повсюду. Радиотехника, электротехника переменных токов и некоторые другие отрасли техники целиком основаны на использовании колебательных процессов. Физическая сущность тех процессов, в которых имеют место колебания, различна: например, колебания железнодорожного моста и колебания тока в электрическом контуре - совершенно различные явления. Но при всем разнообразии колебаний имеются общие законы, которым они подчиняются. Это позволяет использовать единый подход к изучению колебательных процессов различной физической природы.

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают механические и электромагнитные колебания. В свою очередь каждые из данных колебаний можно классифицировать в зависимости от характера воздействия на колебательную систему: на свободные, или собственные, и вынужденные колебания.

*Свободными*, или *собственными*, называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе, после того как она была выведена из положения равновесия.

Вынужденные колебания происходят под действием внешних периодических сил.

Простейшим примером собственных колебаний является колебания груза на пружине.

#### Пружинный маятник

Рассмотрим груз массой  $m$ , связанный с упругой невесомой пружиной с коэффициентом упругости  $k$  (рис.1.1). Считаем, что груз находится на идеально гладкой горизонтальной поверхности, т.е. между грузом и поверхностью при движении трение отсутствует.

Если пружину, находящуюся в недеформированном состоянии, растянуть (или сжать) на малую величину  $x$ , то возникнет сила  $F$ , стремящаяся вернуть груз в положение равновесия. Смещение груза относительно положения равно-

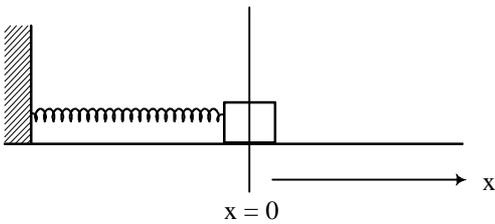


Рис.1.1. Пружинный маятник

весия в любой момент времени можно характеризовать одной величиной – координатой  $x$ .

При небольших растяжениях справедлив закон Гука – значение упругой силы пропорционально изменению длины пружины  $x$ :

$$F = -kx \quad (1.1)$$

Знак минус показывает, что сила всегда направлена в сторону положения равновесия, т.е. сила  $F$  является возвращающей силой.

Будем рассматривать идеализированную колебательную систему, в которой отсутствуют силы трения, сопротивления, т.е. считаем, что на груз действует только упругая сила (1.1).

По второму закону Ньютона составим уравнение движения груза на пружине: произведение массы на ускорение равно результирующей силе, действующей на тело

$$ma = F \quad (1.2)$$

Ускорение  $a$  представляет собой вторую производную координаты  $x$  по времени  $t$ :

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

В нашем случае результирующая сила  $F$  является силой упругости, действующей на груз со стороны пружины. Согласно уравнению (1.2), получим

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Разделив последнее выражение на  $m$ , найдем уравнение движения в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = 0, \quad (1.3)$$

где

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.4)$$

Уравнение (1.3) называется дифференциальным уравнением собственных колебаний пружинного маятника.

В математических курсах доказывается, что решением дифференциального уравнения (1.3) является функция синус или косинус:

$$x(t) = A \cos(w_0 t) \quad (1.5)$$

$$\text{или} \quad x(t) = B \sin(w_0 t) \quad (1.6)$$

где  $A$  и  $\alpha$  произвольные постоянные, величина  $\omega_0$  определяется параметрами системы коэффициентом упругости  $k$  и массой груза  $m$  по формуле (1.4), смысл которой будет ясен ниже.

В справедливости данного утверждения можно убедиться непосредственно подстановкой формул (1.5) и (1.6) в уравнение (1.3).

Такие собственные колебания, при которых физическая величина изменяется по закону синуса или косинуса, называются *гармоническими колебаниями*.

### Характеристики гармонических колебаний

Выберем в качестве закона изменения смещения  $x(t)$  груза относительно положения равновесия функцию косинуса (1.5). График функции (1.5) показан на рис.1.2. По горизонтальной оси (ось абсцисс) отложено время  $t$ , по вертикальной оси (ось ординат) – смещение  $x$ . Так как косинус изменяется в пределах от  $-1$  до  $+1$ , то значения  $x$  находятся в пределах от  $-A$  до  $+A$ . Следовательно, величина  $A$  представляет собой наибольшее отклонение колеблющейся величины  $x$  от равновесия и называется *амплитудой* колебаний.

Величина  $(\omega t + \alpha)$ , стоящая под знаком тригонометрической функции, называется *фазой* колебания. Фаза колебания характеризует положение колеблющейся величины  $x$  в данный момент времени и в системе СИ выражается в радианах. Значение фазы в начальный момент времени ( $t = 0$ ) равно  $\alpha$ , и называется *начальной фазой*. Значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени.

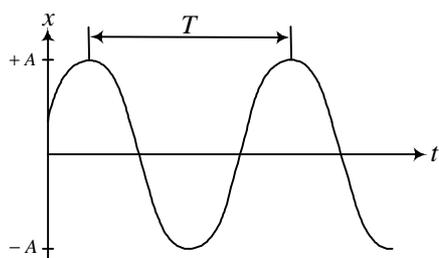


Рис.1.2. График гармонических колебаний

Время, за которое система совершает одно полное колебание, называется *периодом*  $T$ . Из определения величины  $T$  следует, что период равен отношению времени  $t$  к числу

$$\text{колебаний } N: T = \frac{t}{N}.$$

Обратная величина, равная числу колебаний  $N$ , совершаемых в единицу времени, называется *частотой* колебаний  $\nu$ :  $\nu = \frac{N}{t}$ .

В системе СИ частота измеряется в *герцах* (Гц). Один герц - это частота колебания, при которой за одну секунду совершается одно колебание.

Частота и период связаны между собой соотношением:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (1.7)$$

Поскольку косинус, повторяющаяся функция с периодом  $2\pi$ , то значения колеблющейся величины  $x$  будут иметь одно и то же значение, если фазы колебаний отличаются на  $2\pi$ . Следовательно, через время  $T$  фаза колебаний увеличится на  $2\pi$ :

$$\omega_0 T = 2\pi \quad (1.8)$$

Из формулы (1.8) вытекает соотношение между периодом колебаний  $T$  и величиной  $\omega_0$ :

$$\omega_0 T = 2\pi \quad \text{или} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1.9)$$

Таким образом,  $\omega_0$  представляет собой число колебаний за  $2\pi$  секунд и называется *циклической*, или *круговой*, *частотой*.

Из формулы (1.4), учитывая соотношения (1.9) и (1.7), можно получить выражение для частоты и периода пружинного маятника:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{соответственно.}$$

### Векторная диаграмма

Удобным является представление гармонического колебания с использованием вращающегося вектора.

Пусть вектор длиной  $A$  равномерно вращается в координатной плоскости против часовой стрелки вокруг точки  $O$  и полный оборот совершает за время, равное  $T$ . Угловая скорость вращения вектора  $\omega_0$

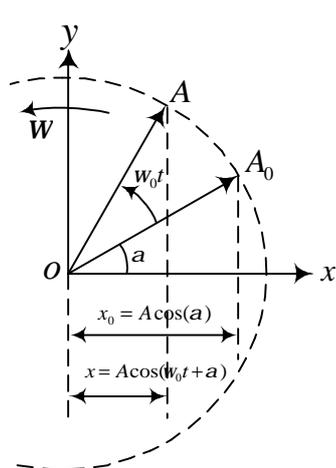


Рис.1.3. Векторная диаграмма

называется *векторной диаграммой*.

будет равна  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Предположим, что в начальный момент времени  $t=0$  вектор составляет с горизонтальной осью  $Ox$  угол  $a$ . Это положение вектора обозначим за  $A_0$  (рис.1.3). Очевидно, что проекция вектора  $A_0$  на горизонтальную ось  $Ox$  будет равна  $A \cos a$ . Угол между вращающимся вектором  $A(t)$  и осью  $Ox$  в любой произвольный момент времени  $t$  будет равен  $(\omega_0 t + a)$ . Тогда проекция вектора  $A(t)$  на ось  $Ox$  в момент времени  $t$  будет равна  $A \cos(\omega_0 t + a)$ .

Как видно, для отклонения от положения равновесия груза на пружине закон получается такой же, как и для проекции вектора, равномерно вращающегося в плоскости. Такое представление гармонического колебания с помощью вращающегося вектора -

Таким образом, гармоническое колебание может быть изображено на диаграмме вращающимся вектором  $\vec{A}$ , длина которого равна амплитуде колебания. Изображение вектора  $\vec{A}$  в начальный момент времени происходит под углом  $a$  к горизонтальной оси  $Ox$ , где величина угла  $a$  равна начальной фазе колебания.

На векторной диаграмме становится наглядным понятие фазы гармонического колебания. Фаза  $(\omega t + a)$  представляет собой угол, который вектор, изображающий данное колебание, составляет с осью  $Ox$ .

### Скорость и ускорение гармонических колебаний

Скорость движения груза есть производная координаты (1.5) по времени:

$$u(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + a) = -u_m \sin(\omega_0 t + a), \quad (1.10)$$

где  $u_m = A\omega_0$  - максимальная скорость, или *амплитуда скорости*.

На основании тригонометрической формулы  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$  запишем (1.10) в виде:

$$u(t) = u_m \cos(\omega_0 t + a - \frac{\pi}{2}). \quad (1.11)$$

Из сравнения формул (1.5) и (1.11) следует, что фаза скорости больше фазы смещения на  $\frac{\pi}{2}$ , т.е. скорость опережает по фазе смещение на  $\frac{\pi}{2}$ , т.е. по времени на четверть периода.

Взяв производную скорости (1.10) по времени, найдем ускорение:

$$a(t) = \frac{du}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + a) = -a_m \cos(\omega_0 t + a), \quad (1.12)$$

где  $a_m = A\omega_0^2$  - максимальное ускорение, или *амплитуда ускорения*.

Учитывая тригонометрическую формулу  $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$ , запишем (1.12) в виде:

$$a(t) = a_m \cos(\omega_0 t + a + \pi). \quad (1.13)$$

Из сравнения (1.5) и (1.13) следует, что фаза ускорения больше фазы смещения на  $\pi$ , т.е. ускорение опережает по фазе смещение на  $\pi$ , т.е. по времени на половину периода. Про такие величины говорят, что они изменяются в противофазе.

Заменяя в формуле (1.12)  $A\cos(\omega_0 t + a)$  через  $x$ , получаем:

$$ax = -\omega_0^2 x. \quad (1.14)$$

Формула (1.14) показывает, что ускорение колеблющейся точки прямо пропорционально смещению и всегда направлено ему навстречу.

Изменение со временем скорости  $u(t)$  (1.11), ускорения  $a(t)$  (1.13) и смещения  $x(t)$  (1.5) колеблющейся точки можно наглядно показать с помощью векторной диаграммы (рис.1.4).

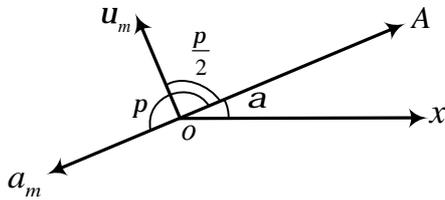


Рис.1.4. Изображение на векторной диаграмме колебаний смещения, скорости и ускорения

Гармоническое колебание смещения  $x(t)$  (1.5) на векторной диаграмме изображается вектором  $\dot{A}$ , длина которого равна амплитуде колебания  $A$ . Вектор  $\dot{A}$  составляет угол  $\alpha$  с горизонтальной осью  $Ox$ . Колебание скорости  $u(t)$  (1.11) изображается вектором  $\dot{u}$ , длина которого равна  $u_m = A \omega$ . Вектор  $\dot{u}$  составляет угол  $(\alpha + \frac{\pi}{2})$  с горизонтальной осью  $Ox$ . Колебание ускорения  $a(t)$  (1.13) изображается вектором  $\dot{a}$ , длина которого равна  $a_m = \omega^2 A$ . Вектор  $\dot{a}$  составляет угол  $(\alpha + \pi)$  с горизонтальной осью  $Ox$ .

### Энергетические характеристики колебательного движения

Кинетическую энергию  $W_k$  тела, совершающего гармонические колебания, определим по известной формуле  $W_k = \frac{mu^2}{2}$ . Подставив сюда выражение (1.10), получим закон изменения кинетической энергии со временем:

$$W_k = \frac{m u_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \alpha) \quad (1.15)$$

Поскольку гармонические колебания совершаются под действием упругой силы (1.1), то потенциальную энергию колебательного движения  $W_n$  определим по формуле потенциальной энергии упругой деформации  $W_n = \frac{kx^2}{2}$ . Подставив в нее выражение (1.5), получим закон изменения потенциальной энергии со временем:

$$W_n = \frac{kx_m^2}{2} \cos^2(\omega t + \alpha) \quad (1.16)$$

Из формулы (1.4) выразим коэффициент упругости  $k = m\omega^2$  и подставим в формулу (1.16):

$$W_n = \frac{m A_0^2 \omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \alpha) \quad (1.17)$$

Складывая два выражения (1.15) и (1.17), получим полную энергию  $W_{пол}$  колебательного движения:

$$W_{пол} = W_k + W_n = \frac{m A_0^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t) + \frac{m A_0^2 \omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t) \quad (1.18)$$

Из полученного результата следует, что полная энергия тела, совершающего гармонические колебания под действием упругой силы и при отсутствии трения, все время остается постоянной. Полная энергия прямо пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату циклической частоты.

Используя тригонометрические формулы приведения  $\cos^2(\frac{\alpha}{2})$  и  $\sin^2(\frac{\alpha}{2})$ , выражение для кинетической энергии (1.15) и потенциальной энергии (1.17) можно записать в виде:

$$W_k = \frac{m A_0^2 \omega_0^2}{4} \cos 2(\omega_0 t) \quad (1.19)$$

$$W_n = \frac{m A_0^2 \omega_0^2}{4} \sin 2(\omega_0 t) \quad (1.20)$$

Из формул (1.19) и (1.20) видно, что кинетическая и потенциальная энергии в процессе колебаний изменяются с двойной частотой  $2 \omega_0$  колебательной системы около одного и того же среднего значения  $\frac{m A_0^2 \omega_0^2}{4}$ . Причем колебания  $W_k$  и  $W_n$  происходят в противофазе друг другу. Когда кинетическая энергия достигает максимальной величины, потенциальная энергия обращается в нуль, и наоборот, когда потенциальная энергия максимальна, кинетическая - равна нулю.

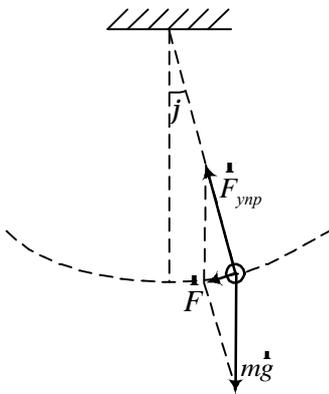
Из выражений (1.16) и (1.17) следует, что максимальные значения кинетической  $W_{maxK}$  и потенциальной энергии  $W_{maxП}$  одинаковы:

$$W_{maxK} = W_{maxП} = \frac{m A_0^2 \omega_0^2}{2} \quad (1.21)$$

В положении равновесия, когда маятник покоится, его полная энергия равна нулю. Для возникновения колебания телу необходимо сообщить энергию. Если сместить из положения равновесия и отпустить, то маятник будет обладать потенциальной энергией. Другой способ возникновения колебания - сообщить ему кинетическую энергию посредством удара, толчка. В результате колебательного движения потенциальная энергия будет переходить в кинетическую энергию, и наоборот. Эти переходы энергий осуществляются так, что их сумма остается неизменной, как это следует из выражения (1.18).

## Математический маятник

Математическим маятником называется тело точечной массы  $m$ , подвешенное на невесомой нерастяжимой нити длиной  $l$  (рис.1.5). Данная идеализированная модель является хорошим приближением системы (например шарик, подвешенный на нити), в которой размерами тела можно пренебречь.



На шарик действуют две силы: сила тяжести  $m\dot{g}$ , направленная вертикально вниз, и сила упругости  $\dot{F}_{упр}$ , направленная вдоль нити.

В положении равновесия сила тяжести  $m\dot{g}$  уравнивается силой натяжения нити  $\dot{F}_{упр}$ . При отклонении маятника из положения равновесия на некоторый угол  $\varphi$ , результирующая сил  $m\dot{g}$  и  $\dot{F}_{упр}$  уже не будет равна нулю, и будет служить возвращающей силой.

Для того чтобы вычислить возвращающую силу, разложим силу тяжести на две составляющие: нормальную  $mg \cdot \cos j$ , направленную вдоль нити, и тангенциальную  $mg \cdot \sin j$ , направленную

Рис.1.5. Математический маятник

перпендикулярно нити по касательной к траектории шарика.

Нормальная составляющая силы тяжести уравнивает силу упругости  $\dot{F}_{упр}$ . Следовательно, возвращающей силой является тангенциальная составляющая силы тяжести. В соответствии со вторым законом Ньютона (1.2) запишем:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin j . \quad (1.22)$$

Знак «минус» в этой формуле означает, что тангенциальная составляющая направлена в сторону, противоположную отклонению маятника.

Уравнение (1.22) имеет простое решение только при малых углах  $\varphi$ , когда  $\sin j \approx j$  (угол  $j$  измеряется в радианах). Это условие реализуется, если смещение  $x$  мало по сравнению с длиной нити  $l$ .

Для малых углов уравнение (1.22) преобразуется:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -gj . \quad (1.23)$$

Смещение маятника от положения равновесия можно характеризовать как углом  $\varphi$ , так и величиной  $x$ , отсчитанной по дуге окружности радиуса  $l$ . Они связаны между собой:  $\varphi = x / l$ . Подставив эту формулу в выражение (1.23), получаем дифференциальное уравнение колебания математического маятника:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0. \quad (1.24)$$

Уравнение (1.24) можно привести к форме (1.3)  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ , которое описывает колебательный процесс, изменяющийся по гармоническому закону, где  $\omega_0$  - циклическая частота математического маятника. Значение циклической частоты определяется выражением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (1.25)$$

Таким образом, малые колебания математического маятника являются гармоническими колебаниями. Колебания математического маятника считаются малыми, если максимальный угол отклонения маятника не превышает величины примерно  $7^\circ$ .

Из вышеприведенных рассуждений следует, что уравнения движения, описывающие колебания пружинного и математического маятников, одинаковы, следовательно, имеют одинаковое решение (1.5).

Из формулы (1.25), учитывая соотношения (1.9) и (1.7), можно получить выражение для частоты и периода математического маятника:

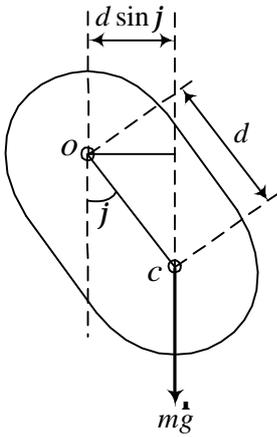
$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ и } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ соответственно.}$$

Как следует из этих формул, частота и период математического маятника зависят только от длины маятника и ускорения свободного падения и не зависят от массы маятника.

### **Физический маятник**

Физический маятник – это тело, совершающее колебание под действием силы тяжести вокруг неподвижной точки или оси, не проходящей через центр масс  $C$  тела. Физический маятник отличается от математического маятника только распределением масс. В данном случае массу тела нельзя представить в виде материальной точки.

В положении устойчивого равновесия центр масс  $C$  физического маятника находится ниже оси вращения  $O$  на вертикали, проходящей через ось (рис.1.6). При отклонении маятника на угол  $\varphi$  возникает момент силы тяжести, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. По определению момент силы относительно оси равен произведению силы на ее плечо. *Плечом силы* называется *кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы*. В данном случае плечом силы тяжести является величина  $d \sin j$ , где  $d$  – расстояние между осью вращения и центром масс  $C$ . Тогда выражение для момента силы тяжести будет иметь вид:



$$M = -mgd \sin j . \quad (1.26)$$

Знак «минус» в этой формуле означает, что момент сил стремится повернуть маятник в направлении, противоположном его отклонению из положения равновесия.

Для составления уравнения движения воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения: момент силы  $M$  относительно оси равен произведению момента инерции тела  $I$  относительно той же оси на его угловое ускорение  $e$ :

$$MI = e . \quad (1.27)$$

Рис.1.6. Физический маятник

Угловым ускорением  $e$  называется вторая производная угла вращения  $j$  по времени:

$$e = \frac{d^2 j}{dt^2} . \quad (1.28)$$

Подставив формулы (1.26) и (1.28) в основное уравнение динамики вращательного движения (1.27), получим:

$$I \frac{d^2 j}{dt^2} = -mgd \sin j , \text{ или}$$

$$\frac{d^2 j}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \sin j = 0 . \quad (1.29)$$

Уравнение (1.29) для физического маятника подобно уравнению (1.22) для математического маятника. Оно имеет точное решение только при малых углах отклонения  $\varphi$ . В этом случае, ограничившись отклонением маятника на малые углы  $j$ , такие, что  $\sin j \approx j$ , уравнение (1.29) преобразуется:

$$\frac{d^2 j}{dt^2} + \frac{mgd}{I} j = 0 . \quad (1.30)$$

Уравнение (1.30) также можно свести к форме (1.3). Для этого введем величину:

$$w_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} . \quad (1.31)$$

Тогда получим уравнение, описывающее гармонические колебания физического маятника:

$$\frac{d^2j}{dt^2} + \omega^2 j = 0. \quad (1.32)$$

Решением (1.32) является закон (1.5)  $j(t) = j_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ , где  $j_m$  - максимальный угол отклонения маятника.

Величина, определяемая формулой (1.31), представляет собой циклическую частоту физического маятника.

Определив циклическую частоту (1.31) из соотношений (1.9) и (1.7), получим выражения для частоты и периода физического маятника:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgd}{I}} \text{ и } T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \text{ соответственно.}$$

Следует отметить, что в формулу для циклической частоты физического маятника (1.31), а также для частоты и периода, входит момент инерции тела  $I$  относительно оси вращения  $O$ . Когда маятник представляет собой тело правильной геометрической формы, то его момент инерции относительно оси  $C$ , проходящей через центр масс  $I_c$ , является известной величиной. Тогда момент инерции тела  $I$  относительно оси вращения  $O$  можно определить по теореме Штейнера:  $I = I_c + ml^2$ , где  $d$  - расстояние между осями  $O$  и  $C$ .

Математический маятник можно рассматривать как частный случай физического маятника, вся масса которого сосредоточена в одной точке. Поэтому все вышеприведенные рассуждения составления уравнения движения на основе уравнения динамики вращательного движения будут справедливы и для математического маятника. Для малых колебаний математического маятника в уравнении (1.30) момента инерции  $I$  определится по формуле момента инерции материальной точки:

$$I = ml^2, \quad (1.33)$$

где  $l$  - расстояние материальной точки до оси вращения, равное длине нити. Подставив формулу (1.33) в уравнение (1.30) и заменив в нем  $d$  на  $l$ , получим:

$$\frac{d^2j}{dt^2} + \frac{mgl}{ml^2} j = 0, \text{ или } \frac{d^2j}{dt^2} + \frac{g}{l} j = 0. \quad (1.34)$$

Уравнение (1.34), записанное для угла  $\varphi$ , подобно уравнению (1.24) для смещения  $x$  математического маятника.

### Сложение гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления, одинаковой частоты с заданными амплитудами и начальными фазами:

$$x_{1t} = A_1 \cos(\omega t + a_1) \quad \text{и} \quad x_{2t} = A_2 \cos(\omega t + a_2). \quad (1.35)$$

Требуется определить, какой вид движения будет являться результатом сложения данных колебаний.

Представим оба колебания с помощью векторной диаграммы (рис.1.7). Первое колебание на диаграмме изобразится вектором  $\vec{A}_1$ , направленным под углом  $a_1$  к горизонтальной оси OX. Второе - вектором  $\vec{A}_2$ , который образует угол  $a_2$  с горизонтальной осью.

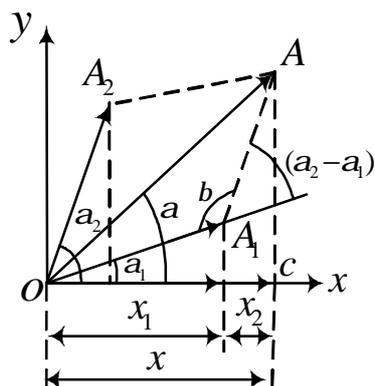


Рис.1.7. Сложение двух гармонических колебаний одинакового направления, одинаковой частоты с помощью векторной диаграммы

Построим по правилу сложения векторов результирующий вектор  $\vec{A}$ . Из рисунка видно, что проекция результирующего вектора на ось OX равна сумме проекций слагаемых векторов:  $x = x_1 + x_2$ .

Так как складываемые колебания имеют одинаковую частоту, то изображающие их вектора на диаграмме вращаются с одинаковой угловой скоростью, и угол между ними, равный разности фаз колебаний  $a_2 - a_1$ , остается неизменным. Тогда результирующий вектор  $\vec{A}$  тоже будет вращаться с той же угловой скоростью. Следовательно, сумма проекций векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  в любой момент времени будет равна проекции результирующего вектора на ось OX и вектор  $\vec{A}$  представляет на диаграмме результирующее колебание.

Таким образом, при сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты получается гармоническое колебание той же частоты  $x_t = A \cos(\omega t + a)$ .

Значения амплитуды  $A$  и начальной фазы  $\alpha$  непосредственно могут быть найдены из геометрических изображений (рис.1.7) по заданным значениям амплитуд  $A_1, A_2$  и начальных фаз  $a_1, a_2$ .

Амплитуду результирующего колебания  $A$  можно найти, например, по теореме косинусов из треугольника  $OAA_1$ :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos b. \quad (1.36)$$

Косинус противолежащего стороне  $OA$  угла  $b$  равен:

$$\cos b = \frac{A_1^2 + A_2^2 - A^2}{2A_1A_2}. \quad (1.37)$$

Тогда квадрат амплитуды результирующего колебания определится:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (1.38)$$

Тангенс угла  $\alpha$ , определяющего начальную фазу результирующего колебания, равен отношению противолежащего катета  $AC$  к прилежащему катету  $OC$  прямоугольного треугольника  $OAC$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AC|}{|OC|}. \quad (1.39)$$

Из рисунка видно, что сторона  $|AC|$  равна сумме проекций векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  на ось  $OY$ :  $|AC| = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2$ .

А сторона  $|OC|$  равна сумме проекций векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  на ось  $OX$ :  $|OC| = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2$ . Подставляя значения катетов в формулу (1.39), получим окончательное выражение тангенса начальной фазы результирующего колебания:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (1.40)$$

Таким образом, задачу сложения двух гармонических колебаний одинакового направления одинаковой частоты можно решить с помощью геометрического построения. Изобразив каждое гармоническое колебание на векторной диаграмме, и сложив эти вектора, мы получим амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\alpha$  результирующего колебания. Метод векторных диаграмм удобен, особенно в тех случаях, когда необходимо сложить несколько колебаний и аналитический расчет становится довольно громоздким.

Как видно из формулы (1.38) значение квадрата амплитуды результирующего колебания  $A^2$  зависит от разности фаз колебаний  $\alpha_2 - \alpha_1$ . Значение

амплитуды результирующего колебания меняется в пределах  $|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2$ .

Минимальная амплитуда  $A = |A_1 - A_2|$  соответствует, когда колебания происходят в противофазе. На векторной диаграмме вектора  $\dot{A}_1$  и  $\dot{A}_2$  при разности фаз  $a_2 - a_1 = \pi$  направлены противоположно друг другу (рис.1.8,б).

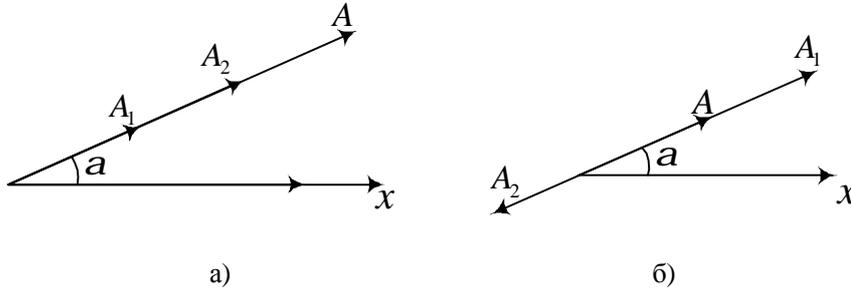


Рис.1.8. Сложение двух гармонических колебаний одинакового направления, одинаковой частоты, находящихся в одинаковой фазе (а); в противофазе (б)

Максимальное значение амплитуды получается, когда колебания совершаются в одинаковой фазе. При  $a_2 - a_1 = 0$  вектора  $\dot{A}_1$  и  $\dot{A}_2$  сонаправлены. Очевидно, что значение амплитуды просто равно сумме длин векторов  $\dot{A}_1$  и  $\dot{A}_2$ , т.е.  $A = A_1 + A_2$  (рис.1.8,а). Этот результат получается и из векторной диаграммы, и из формулы (1.38).

### Сложение колебаний с близкими частотами. Битения

Если частоты двух гармонических колебаний очень близки друг другу, то сложение их за некоторый небольшой промежуток времени происходит почти так же, как и в случае одинаковых частот.

Для простоты предположим, амплитуды колебаний равны, а их начальные фазы равны нулю:  $x_1 = A \cos \omega t$  и  $x_2 = A \cos(\omega' t)$ .

Частота второго колебания  $\omega' = \omega + \Delta\omega$  больше частоты первого на величину намного меньшую самой частоты  $\omega$  ( $\Delta\omega \ll \omega$ ).

В начальный момент времени фазы колебаний практически равны. В этом случае суммарное колебание будет происходить с удвоенной амплитудой. Вследствие того, что второе колебание происходит несколько быстрее, фазы колебаний начнут постепенно расходиться, и через некоторый промежуток времени разойдутся на величину  $\pi$ . В этот момент колебания совершаются в противофазе и амплитуда суммарного колебания равна нулю. Затем снова фазы достигнут совпадения (при разности фаз, равной  $2\pi$ ), а амплитуда станет удвоенной и т.д. Колебание носит пульсирующий характер. Такое периодическое

изменение амплитуды при сложении колебаний с близкими частотами называется *биениями*.

Найдем результирующее смещение суммарного колебания:

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Воспользуемся тригонометрической формулой суммы двух косинусов  $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ , получим:

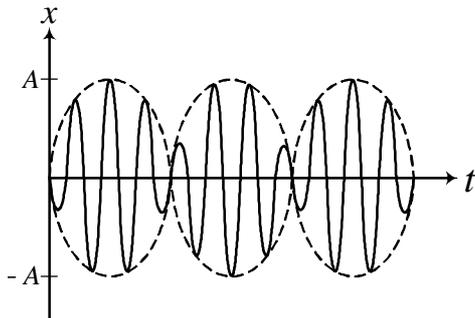
$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

В аргументе второго косинуса величина  $\frac{\Delta\omega}{2}$  намного меньше  $\omega$ , поэтому ею можно пренебречь. Выражение для суммарного колебания примет вид:

$$x = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos(\omega t) \quad (1.41)$$

Как видно из формулы (1.41), результирующее колебание не является гармоническим, а представляет собой произведение двух колебаний. Однако при условии малости разности частот его можно рассматривать как гармоническое с частотой  $\omega$ , с медленно меняющейся амплитудой:

$$2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \quad (1.42)$$



Так как под амплитудой понимается максимальное смещение от положения равновесия, то необходимо формулу (1.42) брать по модулю. Модуль выражения (1.42) будет изменяться в 2 раза быстрее, чем сама функция. Следовательно, частота биений равна разности складываемых частот. Характер зависимости (1.41) изображен на рис.1.9. Штриховой линией показана изменяющаяся амплитуда.

Рис.1.9. Биения

Результат сложения двух гармонических колебаний с близкими частотами можно качественно пояснить с помощью векторной диаграммы. Оба колебания на диаграмме изобразятся векторами, только теперь они вращаются с различными угловыми скоростями. Так как второе колебание имеет большую частоту, то и вектор, изображающий данное колебание, будет иметь большую угловую скорость. Относительно первого вектора второй вектор будет вра-

щаться с постоянной угловой скоростью  $\Delta\omega$ . Через одинаковый промежуток времени вектора будут расположены противоположно друг другу (рис.1.8,б), и через такой же промежуток времени они будут сонаправлены (рис.1.8,а). Первое положение соответствует минимальной результирующей амплитуде (в случае равенства амплитуд колебаний результирующая амплитуда равна нулю). Второе положение соответствует максимальному значению результирующей амплитуды (при  $A_1=A_2$  она равна  $2A$ ).

### Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть материальная точка одновременно совершает колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей  $x$  и  $y$  с одинаковой частотой  $\omega$ , но с различными амплитудами  $A$  и  $B$  и начальными фазами  $a_1$  и  $a_2$ :

$$x = A \cos(\omega t + a_1), y = B \cos(\omega t + a_2). \quad (1.43)$$

Результат сложения определяется разностью фаз колебаний. Рассмотрим некоторые частные случаи сложения этих колебаний.

1. Разность фаз двух колебаний равна нулю:  $a_2 - a_1 = 0$ , или  $a_2 = a_1$ .

Тогда уравнения (1.43) имеют вид:  $x = A \cos(\omega t + a)$ ,  $y = B \cos(\omega t + a)$ .

Разделив одно на другое, получаем:  $y = \frac{B}{A} x$ .

Это уравнение прямой, проходящей в первой и третьей четверти через начало координат и образующей с осью  $Ox$  угол  $a$ , тангенс которого равен отношению амплитуд  $B/A$  (рис.1.10,а).

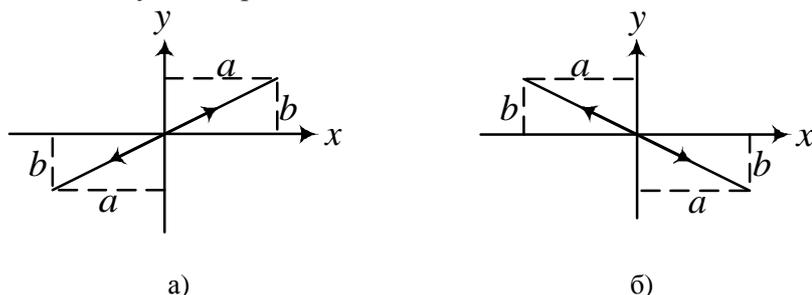


Рис.1.10. Сложение двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинаковой частоты: разность фаз колебаний равна нулю (а); разность фаз равна  $\pi$  (б)

2. Разность фаз двух колебаний равна  $\pi$ :  $a_2 - a_1 = \pi$ , или  $a_2 = a_1 + \pi$ .

Уравнения (1.43) принимают вид:

$$x = A \cos(\omega t + a), y = -B \cos(\omega t + a).$$

Поделив одно на другое, получаем:  $y = -\frac{B}{A} x$ .

Это уравнение прямой, проходящей во второй и четвертой четвертях через начало координат и образующей с осью  $Ox$  угол  $\alpha$ , тангенс которого равен  $-\frac{B}{A}$  (рис.1.10,б).

3. Разность фаз двух колебаний равна  $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{p}{2}$ .

Тогда уравнения (1.43) можно записать в следующем виде:

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t + \alpha_1), \quad \frac{y}{B} = \sin(\omega t + \alpha_1) \quad .$$

Возведем в квадрат почленно левые и правые части этих уравнений и сложим их:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \cos^2(\omega t + \alpha_1) + \sin^2(\omega t + \alpha_1) = 1 \quad .$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам (рис.1.11,а). Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория результирующего колебания имеет вид сложных кривых, называемых *фигурами Лиссажу*. Форма кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. На рис 1.11,б показана траектория при соотношении частот колебаний вдоль оси  $x$  и  $y$  1:2 и разности фаз  $\pi/2$ .

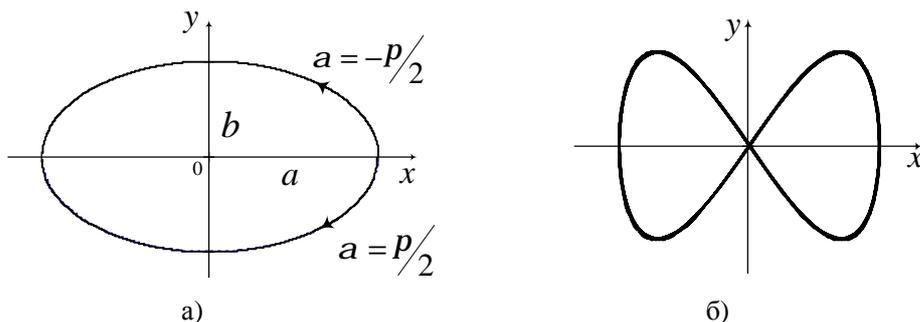


Рис.1.11. Результат сложения двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с разностью фаз равной  $\pi/2$  одинаковой частоты (а); при соотношении частот колебаний вдоль оси  $x$  и  $y$  1:2 (б)

### Затухающие колебания

Рассмотренные свободные колебания маятника, совершающиеся под действием силы упругости (1.1), являются гармоническими только в том случае, если пренебрегается действием сил трения, сопротивления.

Колебательные системы, в которых отсутствуют силы трения, не обладают потерями энергии. Такие системы называются *консервативными*. Это есть некоторая идеализация колебательного процесса.

Опыт показывает, что в реальных колебательных системах всегда действуют силы сопротивления. Такие силы совершают отрицательную работу, тем самым, уменьшая энергию системы. С течением времени амплитуда колебаний уменьшается, и, в конце концов, колебательный процесс прекращается. Системы, в которых энергия рассеивается, называются *неконсервативными*.

При небольших скоростях движения маятника можно считать силу трения  $F_{тр}$  прямо пропорциональной скорости  $u$  и направленной против движения:

$$F_{тр} = -ru, \quad (1.44)$$

$r$  – коэффициент сопротивления.

По второму закону Ньютона сумма сил упругости (1.1) и трения (1.44) должна быть равна в любой момент времени произведению массы тела на его ускорение:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0. \quad (1.45)$$

Учитывая что, скорость представляет собой первую производную координаты  $x$  по времени  $t$  ( $u = \frac{dx}{dt}$ ), а ускорение вторую производную по времени ( $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ ), уравнение (1.45) примет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (1.46)$$

Полученное таким образом уравнение свободных колебаний маятника при наличии трения отличается от уравнения (1.2) добавкой члена  $r\frac{dx}{dt}$ .

Коэффициенты  $r$ ,  $m$  и  $k$  являются параметрами системы. Разделим выражение (1.46) на  $m$  и введем обозначения:  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ,  $\frac{r}{m} = 2b$ .

Тогда уравнение (1.46) примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.47)$$

Уравнение (1.47) называется *дифференциальным уравнением собственных затухающих колебаний*. Решением дифференциального уравнения (1.47) является функция:

$$x(t) = A_0 e^{-bt} \cos(\omega t), \quad (1.48)$$

где  $w = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4}}$ . (1.49)

В формуле (1.49)  $w$  - циклическая частота свободных колебаний в системе с трением;  $\omega_0$  - циклическая частота свободных колебаний в системе без трения (собственная циклическая частота системы);  $b$  - называется коэффициентом затухания.

В справедливости данного утверждения можно убедиться непосредственно подстановкой формулы (1.48) в уравнение (1.47). Решение (1.48) для затухающих колебаний аналогичное уравнению гармонических колебаний (1.5), с той лишь разницей, что в него входит множитель, убывающий со временем  $e^{-bt}$ . Уравнение (1.48) можно свести к форме (1.5)  $x = A e^{-bt} \cos(wt)$ , положив в качестве амплитуды колебаний величину, убывающую по экспоненциальному закону:

$$A = A_0 e^{-bt/2}, \quad (1.50)$$

где  $A_0$  - начальная амплитуда (значение амплитуды в начальный момент времени  $t=0$ ).

Необходимо отметить, что функция (1.48), описывающая затухающий колебательный процесс, является решением дифференциального уравнения (1.47) только в случае, когда  $w$ , определяемая формулой (1.49), является положительной величиной, т.е.  $w^2 > 0$ . Формула (1.49) указывает на то, что свободные колебания при наличии затухания происходят с меньшей частотой, чем колебания такой же системы без трения. Увеличивая трения, мы будем получать все более медленные колебания. При достаточно большом трении, которое можно осуществить, например помещая систему в жидкость с большой вязкостью, колебания вовсе не возникнут.

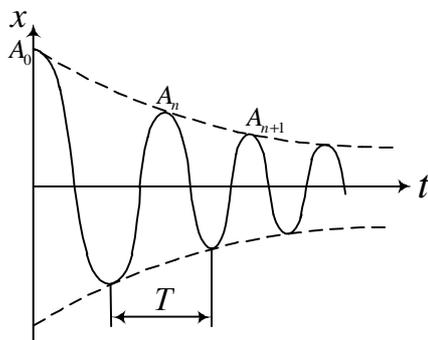


Рис.1.12. График затухающих колебаний

Система, выведенная из положения равновесия, будет медленно возвращаться в исходное состояние. При условии равенства  $w = 0$  период

затухающих колебаний  $T = \frac{2\rho}{w}$  стремится к бесконечности, а частота  $\omega$  к нулю.

Таким образом, при условии  $w\rho \leq$  колебательного процесса не будет.

График зависимости смещения  $x(t)$  маятника относительно положения равновесия от времени  $t$  приведен на рис. 1.12. Убывающая амплитуда показана на рисунке штриховыми линиями.

Период затухающих колебаний  $T$  определим как промежуток времени между двумя последующими максимумами или минимумами функции  $x(t)$  :

$$T = \frac{2\rho}{w} \frac{1}{\sqrt{w\rho - \dots}}$$

### Характеристики затухающих колебаний

Коэффициент затухания  $b$  для механических колебательных систем

связан с коэффициентом сопротивления  $r$  и массой тела  $m$ :

$$b = \frac{r}{2m} . \quad (1.51)$$

Для оценки величины затухания используется промежуток времени  $t$ , в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Из формулы (1.49) следует, что при времени  $t = t$ , отношение  $\frac{A}{A_0} = e^{-bt}$ , откуда  $bt = 1$  и  $b = \frac{1}{t}$ . Следовательно, коэффициент затухания  $b$  есть обратная величина промежутку времени  $t$ , в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Обозначим через  $A_n$  и  $A_{n+1}$  значения амплитуд в двух последовательных максимумах в моменты времени  $t_n$  и  $t_{n+1}$ , причем  $t_{n+1} - t_n = T$ .

Согласно (1.49)  $A_n = A_0 e^{-bt_n}$  и  $A_{n+1} = A_0 e^{-bt_{n+1}}$ .

Найдем их отношение:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{e^{-bt_n}}{e^{-bt_{n+1}}} = e^{bT} . \quad (1.52)$$

Это отношение называют *декрементом затухания*, а его логарифм - *логарифмическим декрементом затухания*  $I$  :

$$I = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = bT . \quad (1.53)$$

Формула (1.52) показывает, что отношение величины каждого максимума к последующему одинаково и равно декременту затухания, т.е. максимумы функции (1.47) образуют убывающую геометрическую прогрессию. Несложно показать, что *логарифмический декремент затухания*  $I$  есть величина, об-

ратная числу колебаний  $N_e$ , по истечении которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз:  $I = \frac{1}{N_e}$ .

Для характеристики колебательных систем часто используется величина, называемая *добротностью*  $Q$ . Она определяется следующим образом:

$$Q = \frac{p}{I} \quad (1.54)$$

Добротность тем больше, чем дольше длятся колебания. При малом затухании  $\omega \gg \gamma$  и  $T \approx \frac{2p}{\omega_0}$  добротность  $Q$  будет равна:

$$Q = \frac{p\omega_0}{I b} \quad (1.55)$$

Для гармонических колебаний было установлено, что полная энергия системы прямо пропорциональна квадрату амплитуды  $W \sim A^2$  (см. (1.18)). В соответствии с этой зависимостью и формулой (1.49) энергия системы при затухающих колебаниях будет убывать со временем по закону:

$$W = W_0 e^{-2bt} \quad (1.56)$$

где  $W_0$  - значение энергии в начальный момент времени  $t=0$ .

### Вынужденные колебания

До сих пор мы рассматривали свободные колебания, которые происходят под действием только внутренних сил (силы упругости, трения). Роль внешних сил заключалась в том, чтобы сообщить системе в начальный момент времени запас энергии, и далее внешние силы прекращали свое действие.

Рассмотрим теперь случай, когда на систему действует внешняя периодическая сила. Колебания, которые будут происходить под действием внешней периодической силы, называются *вынужденными колебаниями*.

Пусть внешняя периодическая сила, действующая на систему, изменяется по закону косинуса:

$$F = F_0 \cos \omega t \quad (1.57)$$

где  $F_0$  - амплитуда внешней силы,  $\omega$  – ее циклическая частота.

Кроме внешней периодической силы в колебательной системе также действуют силы упругости ( $-kx$ ) и силы трения ( $-ru$ ).

По второму закону Ньютона сумма всех сил равна в любой момент времени произведению массы тела на его ускорение:

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (1.58)$$

Оставляя в правой части лишь силу  $F = F_0 \cos \omega t$ , и определяя скорость и ускорение как первую и вторую производную, соответственно, координаты  $x$  по времени  $t$ , получим уравнения (1.58) в следующем виде:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (1.59)$$

Разделим выражение (1.59) на массу  $m$  и введем обозначения:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{r}{m} = 2b, \quad \frac{F_0}{m} = f_0.$$

Тогда уравнение (1.59) запишется:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (1.60)$$

Уравнение (1.60) называется *дифференциальным уравнением вынужденных колебаний*.

Опыт показывает, что при длительном воздействии на колебательную систему внешней периодической силы, она будет совершать гармонические колебания с частотой этой силы. Итак, установившиеся вынужденные колебания происходят по закону:

$$x(t) = A \cos(\omega t - j), \quad (1.61)$$

$j$  - представляет собой сдвиг фаз между внешней силой и смещением  $x$ , т.е. изменения смещения  $x$  отстает по фазе от изменения силы  $F_0 \cos \omega t$ .

В формуле (1.61) величины  $A$  и  $j$  остаются неопределенными. Для их нахождения подставим в уравнение (1.60) значения смещения  $x$ , скорости  $\frac{dx}{dt}$  и ускорения  $\frac{d^2 x}{dt^2}$ . Вычислим первую и вторую производные координаты  $x$  по времени  $t$ , заданной уравнением (1.61):

$$\frac{dx}{dt} = -A \omega \sin(\omega t - j), \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -A \omega^2 \cos(\omega t - j).$$

Подставив данные формулы в уравнение (1.60), получим:

$$-A \omega^2 \cos(\omega t - j) - 2b A \omega \sin(\omega t - j) + A \omega_0^2 \cos(\omega t - j) = f_0 \cos \omega t. \quad (1.62)$$

Решение уравнения (1.62) значительно упрощается, если можно отбросить второй член, соответствующий силе трения, т.е. предполагаем, что потерями энергии в системе можно пренебречь.

$$-A \omega^2 \cos(\omega t - j) + A \omega_0^2 \cos(\omega t - j) = f_0 \cos \omega t \quad (1.63)$$

Равенство (1.63) будет выполняться только для двух значений сдвига фаз  $j$ , если  $j = 0$  и  $j = \pi$ .

В том случае, когда  $j = 0$  уравнение (1.63) примет вид:  $-A \omega^2 \cos \omega t + A \omega_0^2 \cos \omega t = f_0 \cos \omega t$ , откуда амплитуда смещения определится

$$A = \frac{f_0}{\omega} \frac{F_0/m}{\omega}. \quad (1.64)$$

Так как амплитуда по определению положительная величина, то формула (1.64) имеет смысл только для случая  $\omega > \omega_0$ . Для того чтобы смысл амплитуды не терялся для значений циклической частоты  $\omega < \omega_0$ , необходимо принять в уравнении (1.63) сдвиг фаз  $j = \pi$ , а амплитуду определять модулем выражения (1.64).

Таким образом, сдвиг фаз между внешней силой и смещением  $j$  в консервативной колебательной системе меняется скачком при значении циклической частоты внешней силы  $\omega = \omega_0$  от 0 до  $\pi$ . Когда значения циклической частоты внешней периодической силы  $\omega$  меньше циклической частоты  $\omega_0$ , то колебания происходят синфазно с изменением внешней силы. В том случае, когда  $\omega > \omega_0$ , колебания в системе происходят в противофазе с колебаниями силы.

Вышеприведенные рассуждения о вынужденных колебаниях в консервативной колебательной системе справедливы только для установившихся колебаний. В процессе установления колебаний в системе возникают также собственные колебания с циклической частотой  $\omega_0$ . В отсутствие трения колебания, вообще говоря, всегда будут состоять из гармонических колебаний двух частот  $\omega$  (1.61) и  $\omega_0$  (1.5), и результирующее колебание не будет гармоническим. В реальных колебательных системах как бы ни была мала величина затухания, всегда по прошествии времени собственные колебания затухают и в системе остаются только вынужденные колебания, описываемые уравнением (1.61).

Анализ уравнения вынужденных колебаний в неконсервативной системе, т.е. с учетом сил трения, показывает, что амплитуда  $A$  установившихся колебаний определится формулой:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}. \quad (1.65)$$

Сдвиг фаз между внешней силой и смещением  $j$  в неконсервативной колебательной системе зависит от частоты вынуждающей силы  $\omega$  и коэффициента затухания  $b$ :

$$j = \arctg\left(\frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (1.66)$$

## Явление резонанса

Из формулы (1.64) следует, при приближении частоты внешней силы к собственной частоте системы  $\omega \rightarrow \omega_0$  амплитуда вынужденных колебаний консервативной системы резко возрастает, стремясь к бесконечности  $A \rightarrow \infty$  (рис.1.13,а). Этот случай, когда частота внешней вынуждающей силы совпадает с собственной частотой колебательной системы и амплитуда неограниченно возрастает, называется *явлением резонанса*.

На практике колебаний с бесконечно большой амплитудой не наблюдается. Решение (1.64) оказывается неприменимым в области частот, близких к собственной частоте  $\omega_0$ . Необходимо учитывать потери энергии,

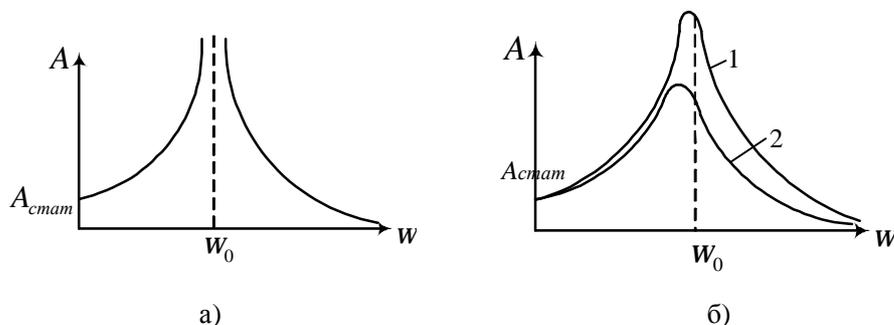


Рис.1.13. График зависимости амплитуды вынужденных колебаний  $A$  от частоты вынуждающей силы  $\omega$  для консервативной системы (а); неконсервативной системы (б)

обусловленные действием сил трения, которые становятся ощутимыми при больших амплитудах. В этом случае при резонансе амплитуда будет иметь конечное значение, а частота отличаться от значения собственной частоты системы  $\omega_0$ .

Чтобы определить, при какой частоте амплитуда колебаний неконсервативной системы будет иметь максимальное значение, необходимо найти максимум функции  $A(\omega)$  (1.65). Для этого нужно продифференцировать данную функцию по  $\omega$  и приравнять нулю. Расчет показывает, что резонансная частота имеет следующее значение:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2}} \quad (1.67)$$

Видно, что в системе, обладающей затуханием, резонансная частота не совпадает с собственной частотой колебательной системы. Чем больше коэффициент затухания  $b$ , тем меньше резонансная частота. Если затухание мало, приходим к тому, что резонансная частота совпадает с собственной частотой.

Подставив значение резонансной частоты (1.67) в формулу (1.65), получим значение амплитуды при резонансе:

$$A_{рез} = \frac{F_0/m}{2b\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}. \quad (1.68)$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний в неконсервативной системе от циклической частоты вынуждающей силы  $\omega$  при различных значениях коэффициента затухания  $b$  показана графически на рис.1.13,б.

Как следует из формулы (1.65), при низких частотах внешней силы  $\omega \rightarrow 0$  амплитуда стремится к значению равному  $A_{стат} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ , называемому *статическим смещением*.

При больших частотах внешней силы  $\omega \rightarrow \infty$  амплитуда стремится к нулю.

Анализ формул (1.67) и (1.68) показывает, что чем меньше коэффициент затухания  $b$  (на рис.1.13  $b_1 < b_2 < b_3$ ), тем выше и правее лежит максимум графика. Совокупность графиков зависимости функции  $A(\omega)$  (1.68), от частоты  $\omega$  соответствующих различным значениям  $b$ , называется *резонансными кривыми*.

При малом затухании  $\omega_0 \gg b$  значение резонансной амплитуды будет:

$$A_{резстат} = \frac{F_0}{2b\omega_0} = \frac{F_0}{2b} \frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{F_0}{2b} Q, \quad (1.69)$$

где  $Q = \frac{\omega_0}{2b}$  - добротность колебательной системы.

Из формулы (1.69) следует, что *добротность показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает смещение системы из положения  $A_{стат}$  под действием силы постоянной величины, равной амплитуде вынуждающей силы  $F_0$* .

Выражение (1.66) определяет отставание по фазе вынужденного колебания от обусловившей его вынуждающей силы. Графическая зависимость  $j$  от частоты  $\omega$  приведена на рис.1.14.

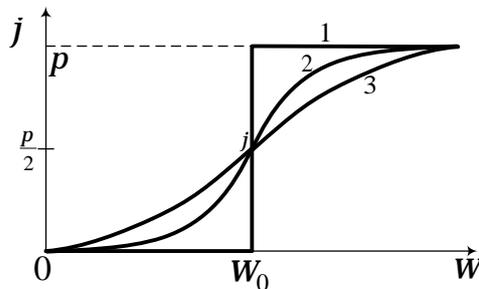


Рис.1.14. График зависимости сдвига фаз между внешней силой и смещением  $j$  от частоты вынуждающей силы  $\omega$  при разных значениях коэффициента затухания  $\beta$

При  $w=0$  получим  $tgj=0$  и, следовательно,  $j=0$ , т.е. колебания происходят синфазно с изменением внешней силы.

При совпадении частот  $w=w_0$ ,  $tgj=\infty$  и  $j=\frac{p}{2}$  - сдвиг фаз между внешней силой и смещением равен  $\frac{p}{2}$ . Если  $w \rightarrow \infty$ , то  $j \rightarrow p$ . Эти рассуждения поясняют ход фазовых кривых при различных значениях коэффициента затухания  $b$  (на рис.1.14  $b_1=0$ ,  $b_2 < b_3$ ).

### **Контрольные вопросы по теме “Механические колебания”**

1. Что называют свободными колебаниями? Привести примеры свободных механических колебаний.
2. Получите дифференциальное уравнение собственных колебаний пружинного маятника.
3. Какие колебания называются гармоническими?
4. Введите понятие амплитуды, фазы и начальной фазы колебаний.
5. Что называется частотой колебаний? Введите понятие циклической частоты колебаний.
6. Как связаны между собой частота, циклическая частота и период колебаний?
7. Получите выражение для частоты и периода пружинного маятника.
8. Как можно представить гармоническое колебание с помощью векторной диаграммой?
9. Запишите зависимость от времени скорости и ускорения маятника, совершающего гармонические колебания.
10. Как изображается на векторной диаграмме колебания смещения, скорости и ускорения?
11. Запишите зависимость от времени кинетической, потенциальной и полной энергии пружинного маятника.
12. Что называется математическим маятником и чем определяется его период?
13. Что называется физическим маятником? Запишите выражение для частоты и периода физического маятника.
14. Что представляет собой результат сложения двух гармонических колебаний одинакового направления, одинаковой частоты?
15. Какой колебательный процесс получается в результате сложения двух гармонических колебаний одинакового направления с близкими частотами?
16. Чем определяется результат сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний? Привести примеры. Что называется фигурами Лиссажу?

17. Какие колебательные системы называются консервативными, неконсервативными?
18. Что понимается под затухающими колебаниями?
19. Получите дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника и запишите его решение.
20. Запишите формулу для циклической частоты свободных затухающих колебаний.
21. По какому закону изменяется амплитуда затухающего колебания?
22. Каков график закона затухающего колебания?
23. Что называется декрементом затухания, логарифмическим декрементом затухания?
24. Дайте определение добротности колебательных систем.
25. По какому закону изменяется энергия затухающего колебания?
26. Что называется вынужденным колебанием?
27. Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.
28. По какому закону происходят установившиеся вынужденные колебания?
29. Запишите формулу для амплитуды установившихся колебаний.
30. Что называется явлением резонанса?
31. Каков график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы для консервативной системы и неконсервативной системы?
32. На какой частоте амплитуда колебаний будет иметь максимальное значение?

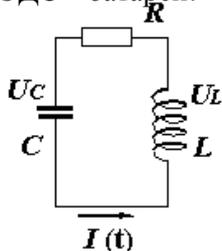
## 2. Электромагнитные колебания

### Свободные электромагнитные колебания

Перейдем к рассмотрению колебательных процессов в электромагнитных явлениях. Среди них важную роль играют электромагнитные колебания, при которых периодически изменяются электрические величины, такие, как заряд на обкладках конденсатора, ток в проводниках и т.д. Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний, используется *колебательный контур*. Колебательным контуром называется электрическая цепь, состоящая из катушки индуктивностью  $L$ , конденсатора емкостью  $C$  и резистора сопротивлением  $R$  (рис.2.1). Чтобы понять, как в таком контуре могут возникнуть свободные колебания, рассмотрим последовательность проходящих в нем процессов.

Для возникновения свободных колебаний систему необходимо вывести из положения равновесия. Этого можно достигнуть зарядкой конденсатора. При

подключении конденсатора к батарее на его обкладках появляются электрические заряды. Между пластинами конденсатора образуется напряжение, равное ЭДС батареи.



В дальнейшем батарея отключается (она играет роль источника первоначальной энергии колебания), и конденсатор замыкается на катушку индуктивности.

Под действием напряжения заряды начинают переходить с одной обкладки на другую. В катушке появляется электрический ток. Появление электрического тока в катушке, обладающей индуктивностью,

сопровождается возникновением магнитного поля и образованием ЭДС самоиндукции. ЭДС самоиндукции препятствует увеличению тока, разряжающего конденсатор, в результате чего нарастание тока, разрядка конденсатора и уменьшение напряжения на нем происходят не мгновенно, а постепенно. Разряжаясь, конденсатор отдает свою энергию движущимся зарядам. В тот момент, когда конденсатор полностью разряжается и напряжение на нем становится равным нулю, вся энергия конденсатора будет отдана движущимся зарядам и их скорость будет максимальной. Поэтому заряд, проходящий через сечение проводника за единицу времени, т.е. сила тока, достигнет наибольшей величины. Энергия магнитного поля, образованного электрическим током, в этот момент времени так же будет иметь максимальное значение.

Контур, в котором сопротивление  $R$  пренебрежимо мало, называется *идеальным электрическим контуром* (рис.2.2).

В случае идеального электрического контура ( $R=0$ ), по закону сохранения энергии, первоначальная энергия электрического поля конденсатора будет равна энергии магнитного поля катушки индуктивности в тот момент, когда ток достигает максимального значения.

Таким образом, в идеальном электрическом контуре при разрядке конденсатора, вся энергия электрического поля, сосредоточенная между его обкладками, переходит в энергию магнитного поля катушки индуктивности. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе стало равным нулю, ток не может исчезнуть мгновенно вследствие действия ЭДС самоиндукции, которая теперь препятствует уменьшению тока и поддерживает его в прежнем направлении.

Итак, уменьшение тока в контуре происходит не мгновенно, а постепенно, вновь заряжая конденсатор. Процесс зарядки конденсатора происходит до тех пор, пока сила тока не станет равной нулю. Между обкладками конденсатора снова появится напряжение, противоположное по знаку первоначальному: пла-

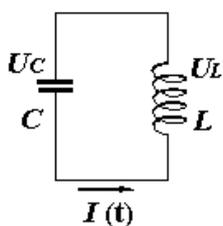
стина конденсатора, заряженная положительно, станет отрицательной, и наоборот.

Исчезновение тока в контуре и нарастание напряжения на конденсаторе сопровождается уменьшением энергии магнитного поля катушки индуктивности и увеличением энергии электрического поля конденсатора. В тот момент, когда энергия магнитного поля станет равной нулю, энергия электрического поля достигнет максимального значения.

В дальнейшем конденсатор будет снова разряжаться, что приведет к появлению в контуре тока, который еще раз перезарядит конденсатор. Этим завершится полный цикл изменения напряжения на конденсаторе и тока в контуре. Далее весь процесс колебаний напряжения и тока будет повторяться. В течение одного колебания происходит превращение энергии электрического поля в энергию магнитного поля и наоборот.

### Гармонические электромагнитные колебания

Найдем законы изменения заряда и напряжения на обкладках конденсатора и тока в цепи идеального электрического контура.



Для составления уравнения воспользуемся вторым правилом Кирхгофа. Согласно этому правилу, алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных участках контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре:

$$U_c = e_s. \quad (2.1)$$

Рис.2.2. Идеальный колебательный контур

Падение напряжения на конденсаторе  $U_c$  равно:

$$U_c = \frac{q}{C},$$

где  $q$  – заряд на обкладках конденсатора.

Единственная ЭДС, действующая в контуре, есть ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке индуктивности  $e_s = -L \frac{dI}{dt}$ .

Подставляя эти значения в формулу (2.1), получим:

$$\frac{q dI}{C dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (2.2)$$

Сила тока – это первая производная заряда по времени:  $I = \frac{dq}{dt}$ . Соответственно, первая производная силы тока по времени представляет собой вторую

производную заряда по времени:  $\frac{d^2q}{dt^2}$ . Учитывая это, уравнение (2.2) можно переписать в виде:

$$\frac{dq}{dt} - L \frac{d^2q}{dt^2}, \text{ или } L \frac{d^2q}{dt^2} = 0. \quad (2.3)$$

Разделив последнее уравнение на  $L$ , получим:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = 0. \quad (2.4)$$

Если ввести обозначения  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , то уравнение (2.4) будет иметь вид,

схожий с уравнением (1.3)  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2.5)$$

Таким образом, уравнение (2.5) является дифференциальным уравнением гармонических электромагнитных колебаний. Из чего следует, что изменение заряда на обкладках конденсатора происходит по гармоническому закону:

$$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t), \quad (2.6)$$

где  $q_m$  - максимальное значение заряда или амплитуда заряда,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  - циклическая частота электромагнитных колебаний.

Все характеристики, введенные для механических гармонических колебаний (частота, период) имеют тот же смысл и для электромагнитных колебаний.

Выражение для частоты и периода электромагнитных колебаний будет иметь следующий вид:

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ и } T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Для того чтобы найти закон изменения силы тока в цепи контура, нужно взять производную от выражения (2.6) по времени:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t) = I_m \sin(\omega_0 t), \quad (2.7)$$

где  $I_m = \omega_0 q_m$  - максимальное значение силы тока или амплитуда силы тока.

Напряжение на обкладках конденсатора  $U_c$  рассчитываем по формуле

$$U_c(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t) = U_{cm} \cos(\omega_0 t), \quad (2.8)$$

где  $U_{cm}$  - амплитуда напряжения на обкладках конденсатора.

Из полученных выражений следует, что изменения заряда и напряжения на обкладках конденсатора и тока в цепи идеального электрического контура происходят по гармоническому закону. Изменения заряда и напряжения протекают синфазно, т.е. в одинаковой фазе. Колебание силы тока опережает по фазе заряд и напряжение на  $\frac{p}{2}$ . Это соответствует тому факту, что момент, когда конденсатор полностью разряжается и напряжение на нем становится равным нулю, сила тока будет максимальной. И наоборот, максимальное значение заряда и напряжения на обкладках конденсатора соответствует нулевому значению силы тока.

Напряжение на катушке индуктивности  $U_L$  всегда преодолевает ЭДС самоиндукции, возникающей в ней, и поэтому равно ЭДС с обратным знаком:

$$U_L = -e \frac{dI}{dt}.$$

Найдем значение производной от силы тока (2.7) по времени:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{U_L \sin(\omega t + \alpha)}{L} = \frac{U_L \cos(\omega t + \alpha)}{L}.$$

Умножив это выражение на индуктивность  $L$ , получим закон изменения для напряжения на катушке индуктивности  $U_L$ :

$$U_L = U_{Lm} \cos(\omega t + \alpha), \quad (2.9)$$

где  $U_{Lm}$  - амплитуда напряжения на катушке индуктивности.

Из формулы (2.9) видно, что колебания напряжения  $U_L$  опережает по фазе заряд и напряжение  $U_C$  на  $p$ , т.е. данные величины изменяются в противофазе.

### Представление гармонических электромагнитных колебаний на векторной диаграмме

Полученные результаты можно наглядно изобразить с помощью векторной диаграммы (рис.2.3). Гармоническое колебание заряда на обкладках конденсатора (2.6) на векторной диаграмме будет представлено вектором длиной  $q_m$ , направленным под углом  $\alpha$  с горизонтальной осью ОХ.

Так как изменения заряда  $q$  и напряжения на обкладках конденсатора  $U_C$  происходят синфазно, то колебание напряжения  $U_C$  (2.8) изображается вектором, длиной  $U_{Cm}$ , сонаправленным с вектором, изображающим колебания заряда (вектор  $q$ ).

Гармоническое колебание силы тока (2.7) изобразится вектором длиной  $I_m$ , повернутым относительно вектора  $q$  против часовой стрелки на угол  $\frac{p}{2}$  (т.к. колебание силы тока опережает по фазе заряд и напряжение  $U_C$  на  $\frac{p}{2}$ ). Ко-

лебание  $U_L$  (2.9) изобразится вектором длиной  $U_{Lm}$ , повернутым относительно вектора  $q$  против часовой стрелки на угол  $p$  (т.к. колебание  $U_L$  опережает по фазе заряд и напряжение  $U_C$  на  $p$ ).

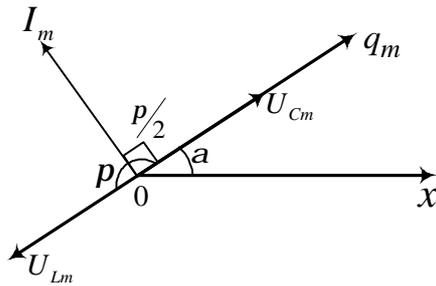


Рис.2.3. Изображение на векторной диаграмме колебаний заряда и напряжения на обкладках конденсатора, силы тока в контуре, напряжения на катушке индуктивности

### Превращения энергии в колебательном контуре

В процессе электромагнитных колебаний в идеальном электрическом контуре происходит периодическое превращение энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно.

Из закона сохранения энергии следует, что при отсутствии сопротивления максимальное значение энергии электрического поля  $W_{Э\max}$  заряженного конденсатора равно максимальному значению энергии магнитного поля  $W_{M\max}$  катушки:

$$W_{Э\max} = W_{M\max}, \text{ или } \frac{CU^2}{2} = \frac{LI^2}{2}.$$

В произвольный же момент времени сумма энергии электрического и магнитного полей является величиной постоянной:

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \text{const}.$$

Эту же зависимость можно записать и так:

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \text{const}.$$

### Аналогия между механическими и электромагнитными колебаниями

Электрические колебания в колебательном контуре имеют сходство с механическими колебаниями, например, груза на пружине (пружинный маятник). Несмотря на различие физической сущности изменяющихся величин (в механических колебаниях периодически изменяются координаты и скорость груза, в

электромагнитных колебаниях – заряд, напряжение и ток), уравнения, описывающие колебательные процессы, имеют одинаковый вид и могут решаться одинаковыми методами.

Сравните уравнения (1.3) для движения груза пружинного маятника с уравнением (2.5) изменения электрического заряда колебательного контура:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

Отсюда можно заключить, что электрический заряд  $q$  изменяется по тому же закону, что и координата груза на пружине  $x$ .

В механических системах гармонические колебания возникают за счет того, что на тело массой  $m$ , выведенное из положения равновесия, действует возвращающая сила, пропорциональная смещению  $x$ :  $F = -kx$ .

В электромагнитных гармонических колебаниях изменение тока в цепи колебательного контура обусловлено напряжением  $U$  между пластинами конденсатора, которое пропорционально заряду  $q$ :  $Uq = \frac{1}{C}$ .

Следовательно, одинаковый характер изменения величин  $x$  и  $q$  объясняется тем, что условия, порождающие колебания, описываются одинаковыми линейными законами ( $F \sim x$ ,  $U \sim q$ ).

Сопоставление механических и электромагнитных колебаний можно сделать на основе взаимных периодических превращений одного вида энергии в другой. Механические колебания сопровождаются взаимными превращениями потенциальной и кинетической энергий маятника. В электромагнитных колебаниях происходят взаимные превращения энергии электрического поля в энергию магнитного поля.

Смещение из положения равновесия пружинного маятника, и соответственно сообщение ему потенциальной энергии, соответствуют зарядке конденсатора от батареи. Сравнивая выражения потенциальной энергии маятника  $\frac{kx^2}{2}$  с энергией электрического поля конденсатора  $\frac{CU^2}{2}$ , можно отметить, что смещению  $x$  соответствует заряд  $q$ , а коэффициенту упругости  $k$  – величина, обратная емкости конденсатора  $\frac{1}{C}$ . Так как потенциальная энергия маятника переходит в кинетическую энергию, а энергия электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля, то кинетической энергии  $\frac{mv^2}{2}$  аналогична величина – энергия магнитного поля  $\frac{LI^2}{2}$  в электромагнитных колебаниях.

Следовательно, скорости движения груза  $u$  соответствует сила тока  $I$ , а роль массы  $m$  играет индуктивность  $L$ . Сопоставление механических и электромагнитных величин, рассмотренных выше, приведено в таблице.

Таблица

Аналогия между величинами, характеризующими механические и электромагнитные колебания

Механические величины	Электромагнитные величины
Координата $x$	Заряд $q$
Скорость $u = \frac{dx}{dt}$	Сила тока $I = \frac{dq}{dt}$
Масса $m$	Индуктивность $L$
Коэффициент упругости $k$	Обратная величина емкости конденсатора $\frac{1}{C}$
Потенциальная энергия $\frac{kx^2}{2}$	Энергия электрического поля конденсатора $\frac{CU^2}{2}$
Кинетическая энергия $\frac{mu^2}{2}$	Энергия магнитного поля $\frac{LI^2}{2}$

Аналогия между механическими и электромагнитными колебаниями приводит к целесообразности использования единого подхода к изучению колебательных процессов различной физической природы. Это позволяет переносить закономерности, полученные при изучении одного вида колебаний на колебания другой природы.

### Затухающие электромагнитные колебания

Свободные электромагнитные колебания, происходящие в реальном колебательном контуре (рис.2.1), являются затухающими. Затухание их объясняется тем, что протекающий в контуре ток нагревает провода катушки, расходуя часть энергии движущихся зарядов. Поэтому количество энергии в контуре уменьшается со временем. Скорость затухания определяется величиной активного сопротивления контура  $R$ . Чем больше активное сопротивление, тем быстрее прекращаются колебания в контуре.

Для составления уравнения, описывающего процессы в электрическом контуре, состоящем из катушки индуктивностью  $L$ , конденсатора емкостью  $C$  и резистора сопротивлением  $R$  (рис.2.1) воспользуемся вторым правилом Кирхгофа. В отличие от уравнения (2.1), составленного для идеального

электрического контура, сумма падений напряжений на отдельных участках реального контура состоит из падения напряжения на конденсаторе  $U_c$  и падения напряжения на активном сопротивлении контура  $U_R$ :

$$U_c + U_R = \mathcal{E}. \quad (2.10)$$

Воспользуемся выкладками, приведенными для гармонических электромагнитных колебаний. Падение напряжения на конденсаторе  $U_c = \frac{q}{C}$ , ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке индуктивности, равна  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$ . Падение напряжения на активном сопротивлении  $U_R = IR$ .

Подставляя эти значения в (2.10), получим:

$$\frac{dq}{C} + IR = \mathcal{E}. \quad (2.11)$$

Учитывая, что сила тока есть производная заряда по времени:  $I = \frac{dq}{dt}$ , а вторая производная заряда по времени – это производная силы тока по времени  $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ , уравнение (2.11) можно переписать в виде:

$$\frac{dq}{C} + R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2} = \mathcal{E}. \quad (2.11)$$

Разделив последнее уравнение на  $L$ , получим:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (2.12)$$

Введем обозначения:

$$w_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \frac{R}{L} = 2b. \quad (2.13)$$

Тогда уравнение (2.12) примет вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2bw \frac{dq}{dt} + w_0^2 q = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) с точностью до обозначения аналогично уравнению (1.47), которое описывает собственные затухающие механические колебания. Как и следует из электромеханических аналогий, вместо координаты  $x$  в нем стоит заряд  $q$ . Уравнение (2.14) является дифференциальным уравнением затухающих электромагнитных колебаний. Решением дифференциального уравнения (2.14) относительно величины  $q$  для случая, когда выполняется условие  $w_0 > b$ , является функция, аналогичная (1.48):

$$q(t) = q_0 e^{-bt} \cos(\omega t), \quad (2.15)$$

где по-прежнему (см. 1.49)  $\omega = \sqrt{w_0^2 - b^2}$ .

Таким образом, в реальном электрическом контуре колебания заряда  $q$  происходят по закону (2.15) с циклической частотой  $\omega$ :

$$w = \sqrt{\frac{1}{LCL} - \frac{R^2}{4}}. \quad (2.16)$$

Формула (2.16) получается, если в (1.49) подставить значения циклической частоты  $\omega_0$  свободных колебаний идеального электрического контура и коэффициента затухания  $b$  (2.13). Амплитуда колебаний заряда убывает по экспоненциальному закону:

$$q_{m0} e^{-bt}, \quad (2.17)$$

где  $q_{m0}$  – начальная амплитуда заряда (значение амплитуды в начальный момент времени  $t = 0$ ).

### Характеристики затухающих электромагнитных колебаний

Выразим характеристики электромагнитных затухающих колебаний коэффициент затухания  $b$ , логарифмический декремент затухания  $I$  (1.53), добротность  $Q$  (1.54), введенные для механических колебаний, через параметры электрического колебательного контура индуктивность катушки  $L$ , емкость конденсатора  $C$  и сопротивление резистора  $R$ .

Коэффициент затухания  $b$  из формулы (2.13) определится:

$$b = \frac{R}{2L}. \quad (2.18)$$

Так же, как и для механических колебательных систем, коэффициент затухания  $b$  есть обратная величина промежутку времени  $t$ , в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Логарифмический декремент затухания  $I$ , определяемый отношением двух соседних амплитуд (амплитуд колебаний заряда, напряжений, силы тока), разделенных по времени на период, будет равен:

$$I = T \frac{R}{2L}. \quad (2.19)$$

В случае малого затухания  $b \ll \omega_0$  можно считать  $\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Тогда

$$I = \frac{R}{2L} \frac{1}{\omega} = \frac{R}{2L} \sqrt{LC}. \quad (2.20)$$

Добротность  $Q$  электрического колебательного контура равна:

$$Q = \frac{P\omega}{I} = \frac{L}{R}. \quad (2.21)$$

При малом затухании  $b\omega \ll \omega_0$  добротность определится:

$$Q \approx \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.22)$$

Как следует из формул (2.19), (2.20), (2.22), коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания и добротность определяются параметрами контура  $L$ ,  $C$  и  $R$ , и, следовательно, являются характеристиками контура.

### Вынужденные электромагнитные колебания

В реальном электрическом колебательном контуре колебания всегда затухают. Чтобы колебания не затухали в течение продолжительного времени, в контур можно ввести источник переменной ЭДС. Колебания, которые будут происходить в таком контуре, называются вынужденными. Для получения вынужденных колебаний можно также, разорвав контур, подать на его контакты переменное напряжение  $U$  (рис.2.4):

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (2.23)$$

где  $U_m$  – амплитуда,  $\omega$  – циклическая частота внешнего напряжения.

Рассмотрим процессы, происходящие в цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов: катушки индуктивностью  $L$ , конденсатора емкостью  $C$ , резистора сопротивлением  $R$  и источника переменного напряжения (2.23) (рис.2.4).

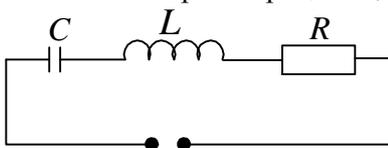


Рис.2.4. Колебательный контур При включенном

источнике конденсатор

с источником переменного

напряжения

показывает опыт, в контуре появляется переменный ток – ток вынужденных колебаний и его частота равна частоте изменения ЭДС источника.

Для составления уравнения вынужденных колебаний воспользуемся вторым правилом Кирхгофа:

$$U_{CRSM} + U_{LR} = U_m \cos \omega t, \quad (2.24)$$

где  $U_c = \frac{q}{C}$  – падение напряжения на конденсаторе;

$U_{LR} = IR$  – падение напряжения на активном сопротивлении;

$e_s = -L \frac{dI}{dt}$  – ЭДС самоиндукции возникающая в катушке индуктивности.

Подставляя эти значения в уравнение (2.24), получим:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{R}{L}q = \frac{U}{L} \cos \omega t \quad (2.25)$$

Произведя те же преобразования, что и в теме "Затухающие электромагнитные колебания", и введя такие же обозначения:

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $\frac{R}{L} = 2b$ , придадим уравнению (2.25) вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2b \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U}{L} \cos \omega t \quad (2.26)$$

Это уравнение с точностью до обозначения совпадает с уравнением (1.60) для механических вынужденных колебаний и называется *дифференциальным уравнением вынужденных электромагнитных колебаний*. Согласно электромеханическим аналогиям, установившиеся вынужденные колебания заряда  $q$  будут происходить по закону:

$$q = q_m \cos(\omega t - j) \quad (2.27)$$

где  $q_m$  – амплитуда заряда;  $j$  – представляет собой сдвиг фаз между приложенным внешним напряжением  $U \cos \omega t$  и изменением заряда, т.е. изменения заряда отстает по фазе от изменения внешнего напряжения на величину  $j$ .

Взяв производную от выражения (2.27) по времени, найдем закон изменения силы тока в цепи контура:

$$I = \frac{dq}{dt} = q_m \omega \sin(\omega t - j) = I_m \sin(\omega t - j) \quad (2.28)$$

где  $I_m = q_m \omega$  – максимальное значение силы тока или амплитуда силы тока.

Формулу (2.28) можно переписать следующим образом:

$$I = I_m \cos(\omega t - a) \quad (2.29)$$

где  $a = j - \frac{\pi}{2}$  – представляет собой сдвиг фаз между приложенным внешним напряжением  $U \cos \omega t$  и изменением тока в цепи, т.е. колебания тока отстают по фазе от изменения внешнего напряжения на величину  $a$ .

Для того чтобы определить соотношение между амплитудой силы тока в цепи  $I_m$  и амплитудой приложенного внешнего напряжения  $U_m$ , перепишем уравнение (2.25) в виде:

$$\frac{dq}{dt} + iR_L U + U_C = U_m \cos \omega t, \text{ или } U_C + U_R + U_L = U_m \cos \omega t. \quad (2.30)$$

В левой части уравнения (2.30) стоит сумма напряжений на отдельных элементах контура: на конденсаторе  $U_C$ , активном сопротивлении  $U_R$  и на катушке индуктивности  $U_L$ . Эта сумма напряжений в каждый момент времени равна внешнему напряжению.

Падение напряжения на катушке индуктивности  $U_L$  равна ЭДС самоиндукции, возникающей в ней, взятая с обратным знаком. Каждая из четырех величин, входящая в уравнение (2.30), изменяется по гармоническому закону.

Напряжение на конденсаторе:

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \alpha). \quad (2.31)$$

Учитывая, что амплитуда заряда  $q_m$  связана с амплитудой силы тока  $I_m = \omega q_m$ , а сдвиг фаз  $\alpha$  между приложенным внешним напряжением и изменением заряда равен  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Напомним, что  $\alpha$  есть сдвиг фаз между приложенным напряжением и изменением тока в цепи. Тогда выражение для напряжения  $U_C$  будет иметь следующую форму:

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \alpha) = \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t - \alpha). \quad (2.32)$$

В формуле (2.32) через  $U_{Cm}$  обозначено максимальное значение напряжения на конденсаторе, которое равно:

$$U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C}, \quad (2.33)$$

где  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  – сопротивление, оказываемое конденсатором переменному току, которое называется *емкостным сопротивлением*.

Из формулы (2.32) следует, что *колебание напряжения на конденсаторе отстает по фазе от изменения силы тока  $I = I_m \cos(\omega t)$  на  $\frac{\pi}{2}$ .*

Напряжение на активном сопротивлении определяется выражениями:

$$U_R = I_m R \cos(\omega t - \alpha). \quad (2.34)$$

$$U_{Rm} = I_m R, \quad (2.35)$$

где  $U_{Rm}$  – максимальное значение напряжения. *Изменения напряжения на активном сопротивлении и силы тока в цепи протекают синфазно.*

Падение напряжения на катушке индуктивности равно  $U_L = \frac{dI}{dt}$ . Взяв производную от выражения (2.27) по времени и умножив на индуктивность  $L$ , получим выражение для напряжения  $U_L$ :

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = \frac{P}{2} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (2.36)$$

В формуле (2.36) максимальное значение напряжения на катушке индуктивности обозначили  $U_{Lm}$ :

$$U_{Lm} = I_m X_L = I_m \omega L \quad (2.37)$$

Величина  $X_L = \omega L$  – называется *индуктивным сопротивлением*, это сопротивление, которое оказывает катушка индуктивности переменному току.

Из сравнения формулы (2.36) с законом изменения силы тока (2.27), следует, что *колебания напряжения на катушке индуктивности опережает по фазе колебания силы тока на  $\frac{P}{2}$* .

Итак, определив законы изменения всех величин, входящих в уравнение (2.30)  $U_C$  (2.32),  $U_R$  (2.34) и  $U_L$  (2.36), решим его с помощью векторной диаграммы (рис.2.5). Напомним, что гармоническое колебание может быть представлено на диаграмме с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с горизонтальной осью угол  $\alpha$ , равный начальной фазе колебания.

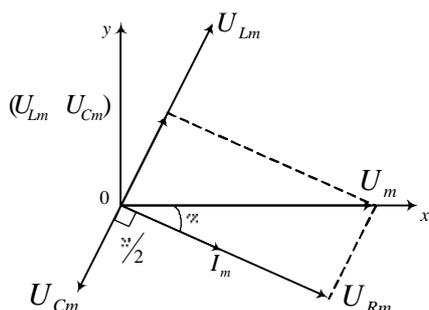


Рис.2.5. Изображение на векторной диаграмме колебаний силы тока в контуре и напряжений на обкладках конденсатора, активном сопротивлении и катушке индуктивности.

На диаграмме переменное внешнее напряжение изобразится вектором, длиной  $U_m$ , направленным вдоль горизонтальной оси ОХ. Изменения силы тока сдвинуты по фазе относительно внешнего напряжения на величину  $\alpha$ , причем  $\alpha$  в законе (2.29) стоит со знаком минус. Поэтому колебание тока изобразится вектором длиной  $I_m$ , повернутым относительно горизонтальной оси ОХ по часовой стрелке на угол  $\alpha$ .

Колебание  $U_R$  будет представлено вектором длиной  $U_{Rm}$  (2.35), сонаправленным с вектором, изображающим колебания силы тока (вектор тока). Так как колебание  $U_L$  опережает, а  $U_C$  отстает по фазе от колебаний силы тока на  $\frac{P}{2}$ , то на векторной диаграмме они будут изображены следующим образом. Ко-

лебание  $U_L$  изобразится вектором длиной  $U_{Lm}$  (2.37), повернутым относительно вектора тока против часовой стрелки на угол  $\frac{p}{2}$ . Колебание  $U_C$  изобразится вектором длиной  $U_{Cm}$  (2.33), повернутым относительно вектора тока по часовой стрелке на угол  $\frac{p}{2}$ .

Согласно уравнению (2.30), сумма трех векторов, представляющих колебания  $U_R$ ,  $U_C$  и  $U_L$ , должна быть равна вектору, соответствующему приложенному внешнему напряжению. Длина результирующего вектора равна  $U_m$ , угол  $a$  между ним и осью токов равен сдвигу фаз между приложенным внешним напряжением и изменением тока в цепи.

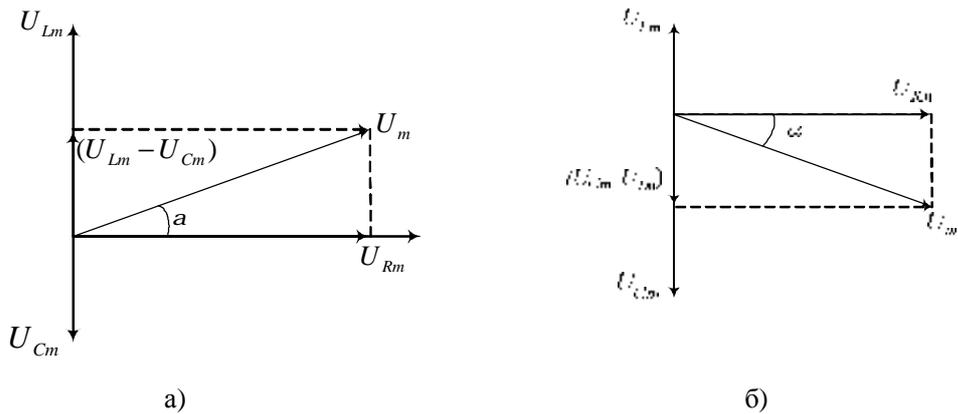


Рис.2.6. Векторная диаграмма цепи переменного тока для случая, когда индуктивное сопротивление контура больше емкостного сопротивления (а); когда индуктивное сопротивление контура меньше емкостного сопротивления (б)

Для большей наглядности повернем всю векторную диаграмму на угол  $a$  против часовой стрелки. При этом взаимное расположение векторов не изменится. Вектор, изображающий колебание  $U_R$ , будет направлен горизонтально. Вектора, изображающие колебания  $U_C$  и  $U_L$ , будут направлены вертикально вниз и вверх соответственно (рис.2.6).

Из диаграммы, по теореме Пифагора, следует, что:

$$U_m^2 = U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{Cm})^2 \quad (2.38)$$

Подставив в формулу (2.38) максимальные значения всех напряжений (2.33), (2.35) и (2.37), получим:  $I_m^2 = \frac{U_m^2}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ , или

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U_m}{Z} \quad (2.39)$$

где  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$  (2.40)

Формула (2.39) определяет соотношение между амплитудой силы тока в цепи  $I_m$  и амплитудой приложенного внешнего напряжения  $U_m$  и представляет собой закон Ома для переменного тока. Величина  $Z$ , определяемая выражением (2.40), называется полным сопротивлением переменного тока.

Векторная диаграмма также позволяет определить величину  $\alpha$ . Из рисунка видно, что тангенс угла  $\alpha$  есть отношение двух сторон прямоугольного треугольника  $U_{Lm} - U_{Rm}$  к  $U_{Rm}$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{U_{Lm} - U_{Rm}}{U_{Rm}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (2.41)$$

Ток в цепи может не только отставать по фазе от внешнего приложенного напряжения (при  $\alpha > 0$ ), но и опережать его (при  $\alpha < 0$ ), в зависимости от знака величины  $\alpha$ .

Из формулы (2.41) следует, что ток в цепи будет отставать по фазе от внешнего напряжения ( $\alpha > 0$ ) в том случае, когда  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ , или  $U_{Lm} > U_{Rm}$  (см. рис.2.6,а). опережение по фазе тока внешнего напряжения ( $\alpha < 0$ ) наблюдается при условии  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ , или  $U_{Lm} < U_{Rm}$  (см. рис.2.6,б).

### Резонанс напряжений

Полное сопротивление переменного тока  $Z$  (2.40) зависит от частоты внешнего напряжения  $\omega$ . При частоте  $\omega$ , когда индуктивное сопротивление становится равным емкостному сопротивлению  $X_L = X_C$ , полное сопротивление становится минимальным и равным активному сопротивлению  $R$ . Согласно формуле (2.39) ток в контуре достигает максимального значения, равного:

$$I_{m, \max} = \frac{U_m}{R} \quad (2.42)$$

Это явление называется *резонансом напряжений*. Частота, при которой достигается резонанс,  $\omega_{\text{рез}}$  определяется из условия  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  и равна

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (2.43)$$

т.е. резонансная частота равна собственной частоте контура.

Зависимость амплитуды силы тока от частоты приложенного напряжения приведена на рисунке 2.7.

Из формулы (2.41) видно, что при резонансе сдвиг фаз между приложенным напряжением и изменением тока в цепи равен нулю. Это означает, что при

резонансе напряжения на катушке индуктивности  $U_{L_{рез}}$  и на конденсаторе  $U_{C_{рез}}$  равны по амплитуде и противоположны по фазе и компенсируют друг друга. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему приложенному напряжению.

Напряжения на катушке индуктивности и на конденсаторе в момент резонанса резко возрастают, т.к. ток в цепи максимален:

$$U_{L_{рез}} = U_{C_{рез}} = I_m \omega_{рез} L = \frac{U_m}{R} \omega_{рез} L = \frac{U_m}{R} Q, \quad (2.44)$$

где  $Q$  - добротность контура (2.21).

Таким образом, напряжения на катушке индуктивности и на конденсаторе в момент резонанса в  $Q$  раз превышают приложенное внешнее напряжение.

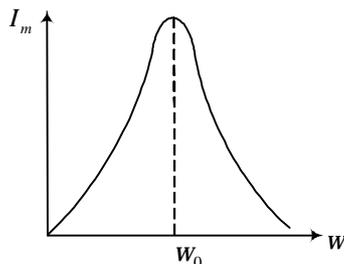


Рис.2.7. График зависимости амплитуды силы тока от частоты приложенного напряжения

### Контрольные вопросы по теме “ Электромагнитные колебания”

1. Что представляет собой колебательный контур?
2. Как могут возникнуть в контуре свободные электромагнитные колебания?
3. Что называется идеальным колебательным контуром?
4. Получите дифференциальное уравнение гармонических электромагнитных колебаний.
5. По какому закону изменяется заряд на обкладках конденсатора в идеальном колебательном контуре?
6. Запишите выражение для частоты и периода электромагнитных колебаний.
7. Найдите закон изменения силы тока в цепи контура и напряжения на обкладках конденсатора.
8. Изобразите электромагнитные колебания с помощью векторной диаграммы.
9. Какие периодические превращения энергии происходят в электромагнитном колебательном контуре?

10. Приведите аналогию между механическими и электромагнитными колебаниями.
11. Чем обусловлено затухание свободных электромагнитных колебаний, происходящих в реальном колебательном контуре?
12. Получите дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний и запишите его решение.
13. Приведите характеристики затухающих электромагнитных колебаний.
14. Как можно получить вынужденные электромагнитные колебания.
15. Запишите дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний.
16. Запишите закон изменения напряжения на обкладках конденсатора, на активном сопротивлении и на катушке индуктивности в цепи переменного тока.
17. Что называется емкостным сопротивлением, индуктивным сопротивлением?
18. Изобразите на векторной диаграмме колебаний силы тока в контуре и напряжений на обкладках конденсатора, активном сопротивлении и катушке индуктивности.
19. Запишите закон Ома для переменного тока.
20. Какое явление называется резонансом напряжений?
21. Чему равна частота, при которой достигается резонанс?
22. Чему равен сдвиг фаз между приложенным напряжением и изменением тока в цепи при резонансе?
23. Запишите выражения для напряжения на катушке индуктивности и на конденсаторе в момент резонанса.
24. Каков график зависимости амплитуды силы тока от частоты приложенного напряжения?
25. Чему равно значение тока в цепи при резонансе?

### 3. Волны

#### Механические волны

Если в каком-либо месте упругой среды возбудить колебания, то вследствие взаимодействия между частицами среды эти колебания начнут распространяться от частицы к частице. Процесс распространения колебаний в пространстве называется *волной*. При волновом процессе частицы среды лишь совершают колебания около своих положений равновесия, и не переносятся волной. В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают *продольные* и *поперечные* волны. В продольной волне смещение частиц происходит в том же

направлении, в котором она движется. В поперечной волне смещение частиц перпендикулярно направлению ее распространения. Упругие поперечные волны могут возникнуть только в такой среде, которая обладает упругостью формы, т.е. способна сопротивляться деформации сдвига. Этим свойством обладают лишь твердые тела. Продольные волны связаны с объемной деформацией среды, поэтому они могут распространяться как в твердых телах, так в жидких и газообразных.

### Уравнение плоской волны

Выведем уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ . Уравнение волны выражает зависимость смещения  $x$  колеблющейся точки, участвующей в волновом процессе, от координаты ее равновесного положения  $x$  и времени  $t$ :  $x(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$ .

Пусть источник гармонических колебаний находится в точке с координатой  $x = 0$ , и колебания имеют вид  $x(0,t) = A \cos \omega t$ , где  $A$  - амплитуда колебаний,  $\omega$  - циклическая частота.

Предположим, что распространение колебаний происходит без затухания, так что амплитуды колебаний всех точек одинаковы. До некоторой точки с координатой  $x$  колебательный процесс от начала координат ( $x = 0$ ) дойдет через время  $t$ . Следовательно, колебания частиц среды в точке  $x$  будут запаздывать по сравнению с началом колебаний на время  $t = \frac{x}{u}$ , где  $u$  - скорость распространения волны. А смещение частиц в точке  $x$  в момент времени  $t$  будет равно смещению частиц в точке  $x = 0$  в момент времени  $t - \frac{x}{u}$ :

$$x(x,t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right) \quad (3.1)$$

Это уравнение (3.1) называется уравнением плоской волны. Величина  $\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$ , стоящая под знаком косинуса, называется *фазой* волны.

Множество точек волны, имеющих одновременно одинаковую фазу, называется *волновой поверхностью*. Для рассмотренного случая волновой поверхностью является плоскость  $x = \text{const}$ , т.е. всем точкам плоскости, перпендикулярной оси  $x$ , соответствует одинаковая фаза. Отсюда и название волнового процесса - *плоская волна*. Если волновая поверхность представляет собой сферу, то волна называется *сферической*.

Расстояние между двумя ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется *длиной волны*  $\lambda$ . Очевидно, что фазы для таких частиц должны отличаться на  $2\pi$ , т.е.

$$\omega\left(t - \frac{x + \lambda}{u}\right) = \omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + 2\pi$$

Из данного равенства следует, что

$$\frac{wl}{u} = 2p \text{ и } l = \frac{2p}{w} . \quad (3.2)$$

Учитывая соотношения между циклической частотой  $w$ , частотой  $\nu$  и периодом  $T$ , для длины волны  $l$  получим выражение:

$$l = \frac{u}{\nu}, \text{ и } l = T \cdot u . \quad (3.3)$$

Таким образом, длина волны равна тому расстоянию, на которое распространяется фаза колебания за время, равное периоду.

Величина  $w \frac{x}{u}$  в формуле (3.1) представляет собой разность фаз, на которую смещение точки на расстоянии  $x$  отстает по фазе от смещения начальной точки ( $x = 0$ ). Эту разность можно написать и в другой форме

$$w \frac{x}{u} = \frac{2p}{l} x = kx .$$

Отношение  $\frac{2p}{l}$ , обозначенное буквой  $k$ , называется *волновым числом*:

$$k = \frac{2p}{l} . \quad (3.4)$$

Волновое число показывает, сколько длин волн укладывается на расстоянии  $2p$  метров. Эта величина аналогична циклической частотой  $w$ , которая показывает, сколько периодов укладывается в промежутке времени, равном  $2p$  секунд.

Введя волновое число, можно придать уравнению волны (3.1) симметричный вид:

$$x(t) = A \cos \left( \omega t - kx \right) . \quad (3.5)$$

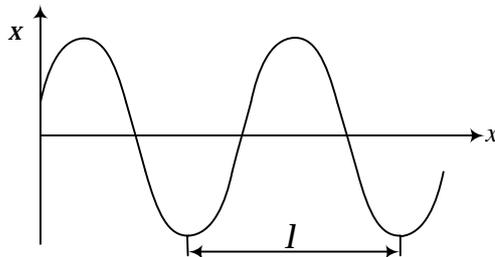


Рис.3.1. График зависимости смещения частиц  $x$  от координаты  $x$

В аргументе косинуса (3.5) (фаза волны) стоят две переменные величины – время  $t$  и расстояние  $x$ , что отражает сущность волнового процесса. С одной стороны, каждая частица совершает колебание около своего положения равно-

веса. При фиксированной координате изменение смещения  $x$  со временем происходит по гармоническому закону. С другой стороны, колебательное движение распространяется от частицы к частице.

Зафиксировав время, мы рассматриваем, в каком положении находятся все точки волны в данный момент. Уравнение (3.5) показывает, что их расположение в пространстве также подчиняется гармоническому закону (см. рис.3.1). Одно и то же значение фазы наблюдается в различных точках пространства в разное время. Из данного условия следует, что фаза волны в точке  $x_1$  в момент времени  $t_1$  будет иметь такое же значение в точке  $x_2$  в момент времени  $t_2$  :

Из этого соотношения следует, что скорость распространения некоторой фазы волны будет равна:  $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u$ , поэтому скорость распространения фазы волны называется *фазовой скоростью*.

### Электромагнитные волны

В основе электромагнитной теории Максвелла лежат два положения. Первое – изменяющееся магнитное поле вызывает появление переменного электрического поля. И второе – всякое изменение электрического поля порождает переменное магнитное поле. Взаимное образование электрических и магнитных полей приводит к понятию *электромагнитной волны* – распространение в пространстве единого электромагнитного поля. При этом изменение состояния электромагнитного поля носит волновой характер.

Теория Максвелла не только предсказала существование электромагнитных волн, но и позволила установить их основные свойства.

Скорость распространения электромагнитной волны определяется формулой

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (3.6)$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость;  $\mu$  – магнитная проницаемость среды;  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная. В системе СИ  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Кл/(м<sup>2</sup>·Н).

Величина  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$  – скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Тот факт, что скорость электромагнитной волны в вакууме оказалась равной скорости света  $c$ , послужило основанием для вывода, что свет является электромагнитной волной.

Так же из теории Максвелла следует, что электромагнитная волна является поперечной. Колебания векторов напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и индукции магнитного поля  $\vec{B}$  происходит в направлении, перпендикулярном

направлению распространения волны, т.е. вектору скорости  $\dot{u}$ . Более того, векторы  $\dot{E}$  и  $\dot{B}$  перпендикулярны друг другу. Таким образом, векторы  $\dot{E}$ ,  $\dot{B}$  и  $\dot{u}$  взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему (рис.3.2).

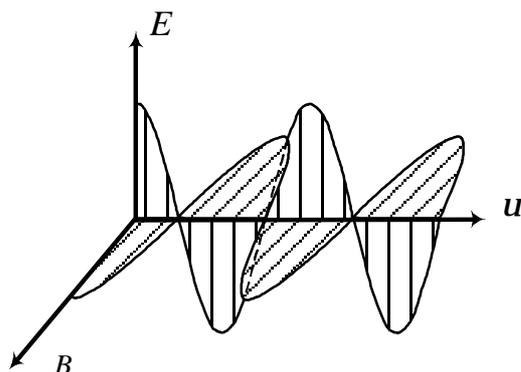


Рис.3.2. График электромагнитной волны

В электромагнитной волне векторы  $\dot{E}$  и  $\dot{B}$  всегда колеблются в одинаковых фазах. Это значит, что колебания  $\dot{E}$  и  $\dot{B}$  одновременно достигают максимума и одновременно обращаются в нуль. Или, для данного фиксированного момента времени, значения  $\dot{E}$  и  $\dot{B}$  в одних и тех же точках достигают максимума и в одних и тех же точках обращаются в нуль.

Распространение плоской электромагнитной волны вдоль оси  $x$  описывается уравнениями, сходное с уравнением упругой плоской волны (3.1):

$$E = E_m \cos\left(\psi - \frac{x}{u} + t\right) \quad \text{и} \quad B = B_m \cos\left(\psi - \frac{x}{u} + t\right), \quad (3.7)$$

где  $E_m$  и  $B_m$  - амплитудные значения напряженности электрического поля  $\dot{E}$  и индукции магнитного поля  $\dot{B}$  соответственно.

### Энергетические характеристики волнового движения

При распространении упругой волны в колебательное движение приходят все новые и новые слои среды. Следовательно, волновое движение приводит к переносу энергии из одной части пространства в другие. Количественной характеристикой перенесенной энергии является *поток энергии*.

*Потоком энергии  $F$*  волны называется количество энергии, переносимое через некоторую поверхность в единицу времени. Единицей потока энергии волны в системе СИ является ватт (Вт). Поток энергии в разных точках среды может иметь различные значения. Для характеристики течения энергии в разных точках пространства вводят понятие *плотности потока энергии*.

Плотность потока энергии  $\mathbf{j}$  – это физическая величина, численно равная энергии  $\Delta W$ , переносимой в единицу времени  $t$  через единичную площадку  $S$ , помещенную в данную точку, перпендикулярно направлению распространения волны:

$$\mathbf{j} = \frac{\Delta W}{\Delta t \Delta S}. \quad (3.8)$$

Единицей плотности потока энергии волны в системе СИ является ватт на квадратный метр (Вт/м<sup>2</sup>).

Плотность потока энергии  $\mathbf{j}$  связана с объемной плотностью энергии волны  $w$  (это энергия, приходящаяся на единицу объема пространства) и фазовой скоростью распространения волны  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{j} = w \mathbf{u}. \quad (3.9)$$

Среднее по времени значение плотности потока энергии называют *интенсивностью* волны  $I$ . Интенсивность волны равна произведению среднему по времени значению объемной плотности энергии  $\langle w \rangle$  на фазовую скорость распространения волны  $\mathbf{u}$ :

$$I = \langle w \rangle u. \quad (3.10)$$

Энергетические характеристики, приведенные для упругих волн, справедливы и для электромагнитных волн.

### Контрольные вопросы по теме “ Волны ”

1. Что называется волной?
2. Какие волны называются продольными?
3. Какие волны называются поперечными?
4. В какой среде могут распространяться продольные и поперечные волны?
5. Получите уравнение плоской волны.
6. Что называется фазой волны?
7. Дайте определение волновой поверхности.
8. Какой волновой процесс называется плоской волной?
9. Какая волна называется сферической?
10. Дайте определение длины волны.

11. Запишите соотношения между длиной волны, циклической частотой, частотой и периодом волны.
12. Что называется волновым числом?
13. Каков график зависимости смещения частиц от координаты?
14. Почему скорость распространения фазы волны называется фазовой скоростью?
15. Сформулируйте основные положения электромагнитной теории Максвелла?
16. Что называется электромагнитной волной?
17. Запишите формулу для скорости распространения электромагнитной волны.
18. Что послужило основанием для вывода, что свет является электромагнитной волной?
19. Электромагнитная волна является продольной или поперечной?
20. Каков график электромагнитной волны?
21. Запишите уравнение плоской электромагнитной волны.
22. Дайте определение потока энергии.
23. Какова единица измерения потока энергии волны в системе СИ?
24. Что называется плотностью потока энергии?
25. Какова единица измерения плотности потока энергии волны в системе СИ?
26. Как связаны плотность потока энергии с объемной плотностью энергии волны и фазовой скоростью распространения волны?
27. Что понимают под интенсивностью волны?
28. Запишите формулу для интенсивности волны.

## 1. Геометрическая оптика

**Законы геометрической оптики.** Длительный процесс исследования свойств света позволил разрешить важнейший методологический вопрос – вопрос о его природе. С созданием теории электромагнитного поля Дж. К. Максвеллом стало ясно, что свет представляет собой электромагнитную волну. Волновой характер света проявляется в таких физических явлениях, как интерференция и дифракция.

Вместе с тем дальнейшие исследования, проведенные в конце XIX в. и первой половине XX в., показали, что данные представления не полностью отражают суть природы света. Было открыто множество доказательств более сложных представлений о природе света, чем просто электромагнитной волне. Тепловое излучение, внешний фотоэффект, эффект Комптона, опыты Боте, Вавилова и многие другие показали, что свет подобен частице, названной фотоном. Таким образом, было твердо установлено, что свет обладает двойственной природой. В одних явлениях проявляются волновые свойства света, в других – корпускулярные. Говорят, что свет обладает корпускулярно-волновым дуализмом. Чем больше частота света, тем в большей степени проявляются корпускулярные (квантовые) свойства света. С уменьшением частоты на первый план выступают волновые свойства света.

Раздел физики, в котором изучаются явления на основе представлений о свете как электромагнитной волне, называют волновой оптикой. Представления о свете как потоке частиц (фотонов) лежат в основе квантовой оптики.

Основной задачей волновой оптики является установление закономерностей распространения световых волн в прозрачных средах и взаимодействия света с веществом. При этом под световыми волнами понимают электромагнитные волны, длина волны которых лежит в пределах от 900 нм (инфракрасные волны) до 0,1 нм (мягкие рентгеновские волны).

Строгое решение этих задач возможно на основе решения уравнений Максвелла. Анализ особенностей распространения световых волн на основе принципа Гюйгенса – Френеля (см. раздел «Дифракция световых волн») показывает, что ввиду малости длины волны света законы оптики можно формулировать на языке геометрии с использованием понятия светового луча. Под световым лучом будем понимать те направления в пространстве, вдоль которых распространяется энергия световой волны. Раздел оптики, в котором распространение света рассматривается на основе понятия световых лучей, называют геометрической оптикой.

Прежде чем перейти к ее рассмотрению, дадим определение абсолютного показателя преломления света. Известно, что скорость света в среде  $v$  меньше

скорости света в вакууме  $c$ . Величину равную,  $n = c/v$  называют абсолютным показателем преломления света в данной среде. Если вдоль произвольного направления в среде величина  $n$  не изменяется, среду называют оптически однородной; если  $n$  остается одинаковой в различных направлениях среда называется изотропной. В данном разделе мы будем рассматривать однородные изотропные среды.

В основе геометрической оптики лежат следующие законы<sup>1</sup>.

- *Принцип суперпозиции световых лучей.* Взаимное пересечение световых лучей не изменяет свойств лучей и не влияет на направление их дальнейшего распространения.

- *Закон прямолинейности распространения световых лучей.* В оптически однородной и изотропной среде свет распространяется прямолинейно

- *Принцип обратимости световых лучей.* Луч, испущенный в обратном направлении, проходит те же точки пространства, что и луч, прошедший в прямом направлении.

- *Закон отражения.* Луч, падающий на границу раздела двух сред АВ, луч, отраженный от нее и нормаль CD к границе раздела сред лежат в одной плоскости, при этом угол падения  $\alpha$  равен углу отражения  $\beta$ , (см. рис. 4.1):

$$\alpha = \beta \quad (4.1)$$

- *Закон преломления световых волн.* Луч, падающий на границу раздела двух сред АВ, луч, преломленный и нормаль CD к границе раздела сред лежат в одной плоскости, отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных двух сред (см. рис. 4.1):

$$\frac{\sin a}{\sin g} = \text{const} = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.2)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – соответственно абсолютные показатели преломления первой и второй сред и относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

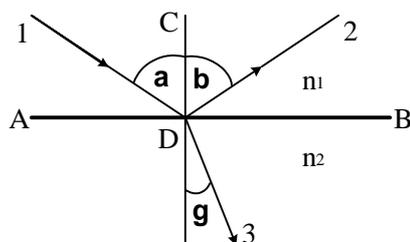


Рис. 4.1. Отражение и преломление световых лучей на плоской границе раздела сред.

<sup>1</sup> В основу геометрической оптики может быть положен принцип Ферма: свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время.

**Оптические системы.** Основу многих оптических приборов составляют плоские поверхности, призмы, сферические зеркальные и прозрачные поверхности. Опираясь на законы геометрической оптики можно с помощью геометрических построений или аналитически определить ход лучей через оптические системы.

Рассмотрим закономерности распространения света через сферические поверхности. Пусть на пути светового луча, распространяющегося в среде с показателем преломления  $n_1$ , встречается оптическая среда с показателем преломления  $n_2$ . Граница раздела этих сред  $S$  имеет форму сферы радиуса  $R$ , см. рис. 4.2.

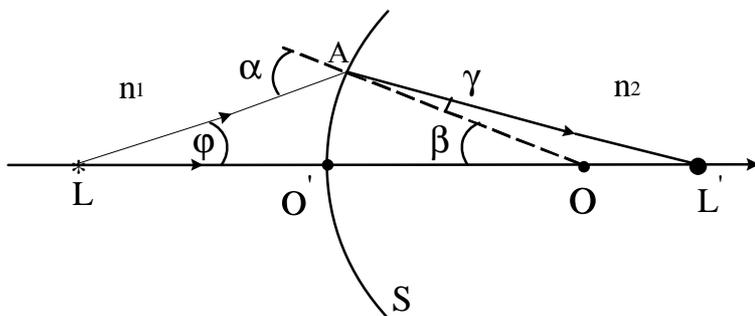


Рис. 4.2. Преломление световых лучей на сферической поверхности.

Пусть свет идет от точечного источника света  $L$  вправо. Для построения изображения этой точки следует взять два луча. Один возьмем вдоль оптической оси  $O'O$ , другой – луч  $LA$ . Точка  $O$  – центр кривизны поверхности  $S$ . В соответствии с законом преломления получаем изображение  $L'$  точки  $L$  на пересечении лучей  $LL'$  и  $AL'$ . Для получения уравнения, определяющего ход лучей через сферическую границу раздела, будем полагать, что в формировании изображения точки  $L$  принимают участие только лучи, идущие под малыми углами  $\varphi$  к главной оптической оси. Такие лучи называют параксиальными. В этом приближении

$$LO' \approx LA, AL' \approx O'L'. \quad (4.3)$$

Используя теорему синусов для треугольников  $LAO$  и  $OAL'$ , получим соответственно:

$$\frac{LO}{LA} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}; \text{ и } \frac{AL'}{OL'} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}. \quad (4.4)$$

Умножая почленно выражения (4.4) и подставляя длины отрезков с учетом правила знаков (см. с. 133) и обозначений:  $LO' \approx LA = -a_1$ ,  $AL' \approx O'L' = a_2$ ,

$OA = OS = R$ ,  $LO = -a_1 + R$ ,  $OL' = a_2 - R$ , после простых преобразований получим :

$$n_2 \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{R} \right) = n_1 \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{R} \right) \quad (4.5)$$

Формулу (4.5) для удобства дальнейшего применения можно преобразовать к виду:

$$\frac{n_2 a_2}{a_2 R} = \frac{n_1 a_1}{a_1 R} \quad (4.6)$$

Из формулы (4.6) видно, что при заданных значениях абсолютных показателей преломления  $n_1$  и  $n_2$  и радиусе кривизны поверхности  $R$  расстояние  $a_2$  зависит только от  $a_1$ . Это означает, что гомоцентрический (исходящий из одной точки) параксиальный пучок сферической поверхностью преобразуется также в гомоцентрический параксиальный пучок.

Формула (4.6) охватывает все основные случаи преломления света на сферических поверхностях. Используя правило знаков, можно данную формулу применить для выпуклой поверхности ( $R > 0$ ) или вогнутой поверхности ( $R < 0$ ). Если  $a_2 > 0$ , то изображение получается справа от поверхности и считается действительным, при  $a_2 < 0$ , изображение получается по ту же сторону, что и предмет и является мнимым. Формулу (4.6) можно применить и для сферического зеркала. В этом случае следует положить  $n_2 = -n_1$ . Рекомендуем ее получить в качестве упражнения самостоятельно. Формула (4.6) справедлива также и для плоского зеркала, для этого в ней следует положить  $R = \infty$ .

**Центрированные оптические системы. Преломление в линзе.** Случай преломления на одной сферической поверхности сравнительно редок. Реальные оптические системы имеют несколько преломляющих поверхностей, центры которых лежат на одной прямой называемой главной оптической осью системы. Такая система называется центрированной.

Простейшим, но практически важным случаем центрированной оптической системы является система из двух сферических поверхностей, ограничивающих прозрачный хорошо преломляющий материал от окружающей среды, обычно воздуха. Такая система называется линзой.

По аналогии с предыдущей задачей рассмотрим задачу о преломлении света на тонкой линзе. Линза называется тонкой, если расстояние между вершинами сферических поверхностей  $d$  – толщина линзы, намного меньше радиусов кривизны поверхностей  $R_1$  и  $R_2$ .

Преломление в линзе можно рассматривать как процесс последовательного прохождения света через две сферические поверхности. В таком случае для каждого из этих моментов можно применить последовательно формулу (4.6).

Первая поверхность с радиусом кривизны  $R_1$ , см. рис. 4.3, создала бы без второй поверхности изображение  $L_o$ , отстоящее от вершины первой поверхности на расстоянии  $a$ . На рис. 4.3 толщина линзы  $d$  для наглядности увеличена в сравнении с радиусами кривизны.

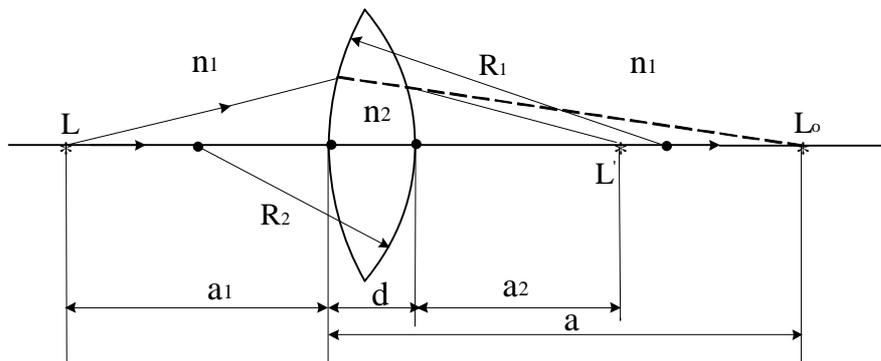


Рис. 4.3. К выводу формулы тонкой линзы.

Уравнение (4.6) для первой поверхности запишется в виде:

$$\frac{n_2 n_1}{a_1 R_2} = \frac{n_2 - n_1}{R_2}. \quad (4.7)$$

Для второй поверхности изображение  $L_o$  как бы является мнимым источником света. Вторая поверхность дает изображение этого источника в точке  $L'$  на расстоянии  $a_2$ . Применение формулы (4.6) для этой поверхности дает выражение:

$$\frac{n_1 n_2}{a_2 R_1} = \frac{n_1 - n_2}{R_1}. \quad (4.8)$$

При записи формул (4.7–4.8) мы учли, что линза по обе стороны окружена одной и той же средой. Складывая почленно выражения (4.6) и (4.7) и вводя относительный показатель преломления  $n_{21} = n_2 / n_1$ , получим:

$$\left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a} \right) \frac{n_2}{R_2} = (n_{21} - 1) \frac{1}{R_2}. \quad (4.9)$$

Формула (4.9) является пригодной для линз любого типа: выпуклых, вогнутых, плосковыпуклых и других. Ее также можно использовать для зеркал разного типа. При использовании формулы (4.9) для каждого конкретного случая следует учитывать правило знаков, изложенное на странице 133.

**Фокусные расстояния и оптическая сила тонкой линзы.** Из формулы (4.9) вытекает важное следствие. Если светящаяся точка удаляется от линзы, то

ввиду постоянства правой части этого уравнения, изменяется расстояние от линзы до изображения. При  $a_1 \rightarrow -\infty$  для  $a_2$  получаем:

$$a_2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{a_1}} \quad (4.10)$$

В силу обратимости световых лучей, если  $a_2 \rightarrow \infty$ , то для  $a_1$  имеем:

$$a_1 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{a_2}} \quad (4.11)$$

Расстояния, определяемые формулами (4.10) и (4.11), определяют положения переднего и заднего фокусов, а также фокусные расстояния линзы. Из этих формул видно, передний и задний фокусы находятся на одинаковом расстоянии от линзы. Заметим, что данный вывод был получен нами при условии, что линза спереди и сзади окружена одной и той же средой. Если спереди линзы и сзади линзы находятся разные среды, то

$$f_1 \neq f_2 \quad (4.12)$$

Из формулы (4.9) следует еще один вывод: чем больше правая часть этой формулы, тем меньше будет значение  $a_2$  при одном и том же значении  $a_1$ , т.е. изображение будет ближе к линзе. Следовательно, правая часть формулы (4.9) является мерой преломляющей способности данной линзы, чем она больше, тем сильнее преломляются линзой лучи, и называется она оптической силой линзы  $D$ :

$$D = \frac{1}{f} \quad (4.12)$$

Из сравнения формул (4.10–4.12) видно, что оптическая сила линзы  $D$  обратно пропорциональна фокусному расстоянию  $f$ :

$$Df = 1 \quad (4.13)$$

Единицей измерения оптической силы, как следует из формулы (4.13), служит величина, равная  $1 \text{ м}^{-1}$ . Она носит название диоптрии (сокращенно – 1 дптр). 1 дптр – это оптическая сила линзы, фокусное расстояние которой равно 1 м.

### Контрольные вопросы по теме «Геометрическая оптика»

1. Дайте понятие светового луча.
2. Сформулируйте законы преломления и отражения световых лучей.

3. Каков физический смысл абсолютного показателя преломления данной оптической среды?
4. Что называется относительным показателем преломления двух сред?
5. В чем заключается сущность принципа суперпозиции световых лучей?
6. Какая среда называется оптически однородной, оптически изотропной, оптически анизотропной?
7. Что называется центрированной оптической системой? Приведите примеры центрированных оптических систем.
8. Постройте примерный ход лучей через границу «стекло – воздух» при распространении света из стекла в воздух.
9. Что называется передним, задним фокусами линзы?
10. Что называется оптической силой линзы? Укажите единицы ее измерения в системе СИ.
11. Какова оптическая сила системы из двух тонких линз, одна из которых имеет оптическую силу 5 дптр, другая оптическую силу -3 дптр?
12. От каких факторов зависит оптическая сила линзы?
13. Изменится ли оптическая сила линзы, если ее перенести из воздуха в воду, если изменится, то как?
14. Сформулируйте правило знаков, используемое при выводе формулы тонкой линзы.
15. Постройте изображение светящейся точки, даваемое собирающей линзой. Точка находится на главной оптической оси между фокусом и линзой.

## 2. Интерференция световых волн

**Общие сведения.** Одним из важнейших доказательств волновых свойств света служит явление интерференции. Интерференцией называют закономерное усиление световых волн в одних точках пространства и их ослабление в других, не зависящее от времени и возникающее при наложении двух или нескольких когерентных волн. При наложении двух когерентных волн говорят о двухлучевой интерференции, если имеет место наложение нескольких когерентных волн, то говорят о многолучевой интерференции. В данном пособии мы ограничимся рассмотрением двухлучевой интерференции.

При анализе процессов распространения и взаимодействия света с веществом основную роль играет электрическая компонента световой волны. Поэтому в дальнейшем будем связывать со световой волной вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , который называют по этой причине световым вектором. Интенсивность световой волны с точностью до постоянного множителя пропорциональна квадрату модуля световой волны.

Анализ двулучевой интерференции проведем на основе рассмотрения двух идеализированных источников света. Суть идеализации заключается в следующем: будем считать источники света точечными, а испускаемые ими волны строго монохроматическими. Затем укажем, к чему приводит отказ от указанных идеализаций.

Пусть каждый из источников испускает соответственно монохроматические волны, определяемые уравнениями:

$$E_{o1} \cos(\omega_1 t - k_1 r_1) \quad \text{и} \quad E_{o2} \cos(\omega_2 t - k_2 r_2) \quad (5.1)$$

где  $E_{o1}, E_{o2}, \omega_1, \omega_2, k_1, k_2$  – соответственно амплитуды, частоты и модули волновых векторов волн, а  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния от первого и второго источников света до точки пространства  $N$ , в которой налагаются данные волны, см. рис. 5.1. При этом для идеально монохроматических волн можно положить начальные фазы равными нулю, ибо такая волна не имеет ни начала, ни конца.

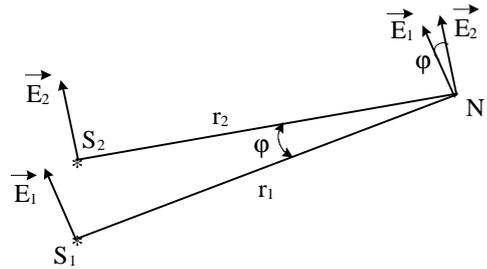


Рис. 5.1. Сложение световых волн от двух источников  $S_1$  и  $S_2$ .

Проанализируем эффект наложения этих волн вначале графически с помощью метода векторных диаграмм, а затем аналитически. В обоих случаях результирующую волну определим на основе принципа суперпозиции волн:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (5.2)$$

Результат графического сложения волн представлен на рис. 5.2, ось OX определяет начало отсчета фаз колебаний в точке наложения волн.

На рис. 5.2 фазы колебаний налагаемых волн в точке  $N$  обозначены соответственно буквами  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ .

Разность фаз этих волн равна:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = k_2 r_2 - k_1 r_1 \quad (5.3)$$

Из соотношения (5.3) видно, что фазы колебаний волн в точке  $N$  с течением времени изменяются, поэтому результирующий вектор  $\vec{E}_o$ , см. рис. 5.2, при разных циклических частотах будет изменяться вследствие изменения угла  $(\Phi_2 - \Phi_1)$  между векторами  $\vec{E}_{o1}$  и  $\vec{E}_{o2}$ .

Из соотношения (5.3) также следует, что при  $\omega_1 = \omega_2$  разность фаз  $(\Phi_2 - \Phi_1)$  в рассматриваемой точке пространства остается неизменной, а параллелограмм, образованный векторами  $\vec{E}_{o1}$  и  $\vec{E}_{o2}$ , будет оставаться также неизменным, а следо-

вательно, вектор  $\vec{E}_0$  будет постоянным. Это означает, что интенсивность света в точке  $N$  со временем не изменяется.

Таким образом, мы приходим к выводу, что при наложении идеально монохроматических волн в некоторой точке пространства результирующая волна может иметь либо постоянную интенсивность, либо со временем ее интенсивность будет изменяться. В случае постоянства амплитуды результирующей волны при условии равенства частот налагаемых волн говорят, что имеет место их интерференция.

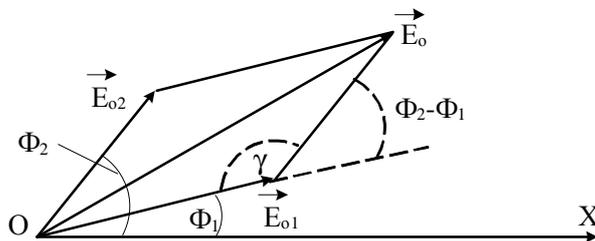


Рис.5.2. Определение результирующей амплитуды  $E_0$  методом векторных диаграмм.

Рассмотрим это явление подробнее аналитически. Будем также исходить из условия

(5.2). При этом будем учитывать, что световые волны являются поперечными и их интерференция возможна лишь при условии, что направления колебаний световых векторов происходят вдоль одного или близких направлений. Из этого требования вытекает также условие, чтобы в случае наложения волн с произвольной ориентацией плоскостей колебаний в пространстве относительно вектора скорости света угол  $\varphi$  между направлениями распространения волн, см. рис. 5.1, был мал. Будем по-прежнему считать источники света точечными, а излучаемые ими волны не идеально монохроматическими.

Уравнения колебаний возбуждаемых этими волнами в произвольной точке наблюдения  $N$  в этом случае запишем в виде:

$$E_1 = E_0 \sin(\omega t + \alpha_1) \quad \text{и} \quad E_2 = E_0 \sin(\omega t + \alpha_2), \quad (5.4)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – начальные фазы колебаний, создаваемые каждой волной в точке наблюдения  $N$ .

Практически все приемники света, и в первую очередь глаз, оценивают интенсивность волны, а не ее амплитуду. Поэтому для дальнейшего анализа явления перейдем к энергетическим величинам, т.е. интенсивности. Для этого возведем в квадрат уравнение (5.2):

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (5.5)$$

и, учитывая связь между напряженностью волны и ее интенсивностью, а также свойство инерционности приемников излучения, получим:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (5.6)$$

где  $I_{рез.}, I_1, I_2$  – соответственно интенсивность результирующей волны и волн, налагаемых в точке наблюдения;  $\tau$  – время усреднения, связанное со случайным изменением разности фаз и определяемое инерционностью приемника излучения. Разность фаз  $(\Phi_2 - \Phi_1)$  в данном случае равна:

$$I_{рез.} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Phi_2 - \Phi_1) \quad (5.7)$$

Отметим, что инерционность приемника излучения заключается в его способности фиксировать как отдельные, быстро изменяющиеся сигналы, в данном случае интенсивность результирующей волны. Например, для глаза сигналы, изменяющиеся с частотой 25 Гц и более, воспринимаются как постоянные, неизменные, что соответствует времени инерционности глаза порядка  $\tau_{ин.} = 0,04$  с. Существуют приемники, например фотоумножители, с существенно меньшим временем инерционности. Поэтому при усреднении интенсивности в выражении (5.6) время усреднения  $\tau$  выбирают существенно бóльшим  $\tau_{ин.}$

Из выражения (5.7) видно, что случайные изменения разности фаз в данной точке наблюдения связаны с различием частот налагаемых волн, а также со случайным изменением начальных фаз волн  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$ . Если разность фаз  $(\Phi_2 - \Phi_1)$  изменяется случайным образом, то интеграл в выражении (5.6) за время усреднения  $\tau$  равен нулю и интенсивность результирующей волны в этой или любой другой точке пространства, где накладываются данные волны, будет равна:

$$I_{рез.} = I_1 + I_2$$

Это означает, что в данной точке складываются интенсивности волн, и явление интерференции не имеет места.

Ситуация изменяется, если разность фаз  $(\Phi_2 - \Phi_1) = const$ . Из формулы (5.7) следует, что разность фаз не будет зависеть от времени, если  $\omega_1 = \omega_2$ , а разность начальных фаз  $(\alpha_2 - \alpha_1) = const$ . В этом случае выражение (5.6) принимает вид:

$$I_{рез.} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Phi_2 - \Phi_1)$$

При этом наибольший интерес представляют два случая. Первый – когда разность фаз налагаемых волн удовлетворяет условию:

<sup>2</sup> Разность начальных фаз может оставаться постоянной, если в точке наблюдения налагаются волны, принадлежащие одному и тому же цугу волн. Под цугом волн понимают волны, испущенные атомами в один и тот же момент времени за время испускания ими света, которое длится примерно  $10^{-8}$  с. Кроме того, в каждом цуге будет одинаковым и направление колебаний.

$$(\Phi_2 - \Phi_1) = 2k\pi, \quad (5.8)$$

где  $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ . В этом случае интенсивность результирующей волны определяется выражением:

$$I_{рез.1212} = 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (5.9)$$

Из формулы (5.9) следует, что при этом условии в данной точке пространства интенсивность результирующей волны больше суммы интенсивностей налагаемых волн.

Второй случай соответствует разности фаз, равной нечетному числу  $\pi$ :

$$(\Phi_2 - \Phi_1) = (2k+1)\pi. \quad (5.10)$$

При этом условии интенсивность результирующей волны определяется выражением:

$$I_{рез.1212} = 0. \quad (5.11)$$

Из него следует, что при условии (5.10) интенсивность результирующей волны в точке наложения оказывается меньше суммы интенсивностей налагаемых волн.

Таким образом, интенсивность света в некоторых точках пространства может быть больше суммарной интенсивности налагаемых волн или меньше в зависимости от разности фаз налагаемых волн в этой точке пространства. Причем этот эффект не зависит от времени. В этом и состоит сущность явления интерференции световых волн.

В силу закона сохранения и превращения энергии при интерференции происходит перераспределение энергии световых волн таким образом, что общая энергия налагаемых волн в данном объеме пространства остается неизменной.

Формулы (5.9) и (5.11) могут быть записаны в эквивалентной форме через значения амплитуд волн в виде:

$$E_{рез.12} = \pm \sqrt{E_1^2 + E_2^2}, \quad (5.12)$$

где знак минус соответствует условию ослабления волн, знак плюс – условию усиления волн. Отсюда следует вывод, что при интерференции световых волн суммируются амплитуды световых волн, но не их интенсивности.

В практических расчетах явления интерференции часто оказывается более удобным условия усиления (5.9) и ослабления (5.10) выражать через геометрическую или оптическую разность хода. Геометрическая разность хода определяется разностью путей, проходящих каждым из световых лучей до точки, где эти лучи налагаются, см. рис. 5.1:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} \quad (5.13)$$

Переход от разности фаз к разности хода осуществляется на основе соотношения :

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi, \quad (5.14)$$

т.к. разность хода  $\lambda$  соответствует разности фаз  $2\pi$ , где  $\lambda$  – длина волны света в данной среде.

Если среда неоднородна, то на разных участках  $\lambda$  не одинакова. Условия усиления и ослабления света через разность фаз (при  $a_2 - a_1 = const$ ) с учетом различия сред запишутся в виде:

$$k_2 k_1 k = \frac{2\pi n_2 n_1 r}{\lambda_0} = 2\pi p \quad (5.15)$$

$$k_2 k_1 k = \frac{2\pi n_2 n_1 r}{\lambda_0} = (2\pi) p \quad (5.16)$$

где  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$ ;  $\lambda_0$  – длина волны света в вакууме.

С учетом оптической разности хода условия усиления и ослабления волн соответственно принимают вид:

$$n_2 n_1 k = I_0, \quad (5.17)$$

$$n_2 n_1 k = \pm \frac{I_0}{2}. \quad (5.18)$$

Таким образом, в случае неоднородных сред условие усиления света через оптическую разность хода выражается следующим образом: *если разность оптических путей двух когерентных волн кратна длине волны света в вакууме, то в данной точке пространства будет усиление света.* Аналогичным образом формулируется и условие ослабления волн.

Теперь учтем условия идеализации. Все реальные источники не являются точечными, их поверхности представляют собой совокупность очень большого числа светящихся точек. Кроме того, каждые источники света не являются строго монохроматическими<sup>3</sup>. Первое условие, как видно из рис. 5.1, накладыв-

<sup>3</sup> Оптические квантовые генераторы света обладают высокой монохроматичностью, для них ширина линии излучения  $\Delta\lambda$ , измеренная на половине высоты максимума, соответствует условию:  $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$ .

вает ограничение на угловой размер, под которым виден источник света из точки наблюдения.

Второе условие не является столь очевидным, но из физических соображений можно заключить, что при малой монохроматичности излучения небольшое изменение оптической разности хода налагаемых волн несущественно скажется на изменении интенсивности результирующей волны. Это в свою очередь уменьшит контраст интерференционной картины и даже может привести к отсутствию интерференционного эффекта.

Для учета размеров источника света и его немонохроматичности вводят понятие временной и пространственной когерентности<sup>4</sup>. Как видно из предыдущего, угловые размеры источника накладывают ограничения на возможность наблюдения интерференции от данного источника. Немонохроматичность излучения также ограничивает возможность наблюдения интерференции от данного источника. С размерами источника связано понятие пространственной когерентности, с немонохроматичностью излучения – понятие временной когерентности.

Отметим некоторые особенности интерференции световых волн от немонохроматических источников света, например ламп накаливания, испускающих сплошной спектр. В этом случае интерференционная картина будет представлять собой чередование цветных полос, причем полной темноты не будет нигде, т.к. места минимумов для одной длины волны совпадают с местами максимумов для другой.

**Методы наблюдения интерференции световых волн.** При рассмотрении явления интерференции следует выделить три основных вопроса:

- 1) каким способом получены когерентные волны в данном конкретном опыте;
- 2) где локализована интерференционная картина в данном опыте;
- 3) какова форма интерференционных максимумов.

Рассмотрим эти задачи подробнее. Два реальных нелазерных источника излучения не могут дать интерференции, даже если частоты их излучения близки, поскольку излучение каждого источника обусловлено несогласованным излучением атомов этих источников, в силу чего разность начальных фаз, а следовательно, и фаз обоих источников, будет изменяться произвольным образом, что и приводит к нарушению условия, при котором возможно явление интерференции.

---

<sup>4</sup> См.: Савельев И. В. Курс общей физики: В 3-х т. Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика: Учеб. пособ.–2-е изд. перераб. — М.: Наука,1982. – 496 с. (§ 120).

Для осуществления интерференции с обычными, нелазерными, источниками света существуют два основных метода получения когерентных волн: метод деления волны по фронту и метод деления волны по амплитуде.

В первом методе когерентные волны получают с помощью оптического устройства, позволяющего разделить пучок света, идущего от одного реального источника света, на два пучка. При последующем наложении таких волн будет иметь место интерференционный эффект, т.к. при этом встречаются цуги (импульсы) волн, испущенные в один и тот же момент времени (см. ссылку 2).

Примерами первого метода получения когерентных волн являются опыты с бипризмами и бизеркалами Френеля, опыт Юнга и другие.

Получение когерентных волн по методу деления волны по амплитуде реализуется в опыте с кольцами Ньютона, при интерференции в тонких пленках и пластинках и др.

В качестве примера реализации первого метода рассмотрим опыт, предложенный ирландским физиком Х. Ллойдом в 1837 году. В этом методе в качестве устройства, разделяющего фронт волны на два, служит плоское зеркало.

На рис. 5.3 представлена оптическая схема этого опыта. От точечного источника света  $S$  распространяется сферическая волна. Часть ее фронта, ограниченная лучами 1 и 2, попадает на экран  $\mathcal{E}$  непосредственно, а вторая попадает на экран вследствие отражения от зеркала  $Z$ , и исходит как бы от второго источника света  $S'$ , являющегося мнимым изображением источника  $S$ .

Таким образом, в месте наложения (это область  $A - B$  экрана) встречаются волны, идущие от одного и того же реального источника, и, следовательно, принадлежащие одному и тому же цугу волн, имеющие один и тот же характер поляризации. Эти волны будут когерентными и при наложении дадут на экране  $\mathcal{E}$  интерференционный эффект.

Расчет разности хода для подобной схемы приведен в задаче 7.1.

Пример получения когерентных волн путем деления световой волны по амплитуде иллюстрируется схемой, представленной на рис. 5.4. Луч света  $I_0$ , падающий на границу раздела  $AC$  плоскопараллельной пластинки, разделяется на два луча:  $AD$  и  $AB$ . От прозрачного диэлектрика отражается примерно 5% энергии, остальная часть энергии проходит до его нижней поверхности. В точке  $B$ , а затем  $C$  луч испытывает отражение и преломление.

В результате указанных процессов образуются две пары когерентных лучей: 1–2 и 3–4.

На рисунке около каждого из лучей указана примерная процентная доля в их интенсивности, относительно интенсивности первичного луча. Пара

лучей 1–2 имеет примерно равную интенсивность, а пара 3–4 – существенно отличающаяся, поэтому при наложении первой пары контраст картины – разница между интенсивностью в минимуме и максимуме, будет высокой, а во втором случае – достаточно малой. Поэтому в данном методе получения когерентных световых волн предпочтительно наблюдать интерференцию в отраженном свете.

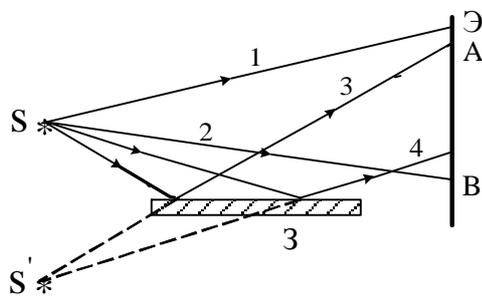


Рис.5.3. Получение когерентных волн методом деления фронта волны. Схема опыта Ллойда.

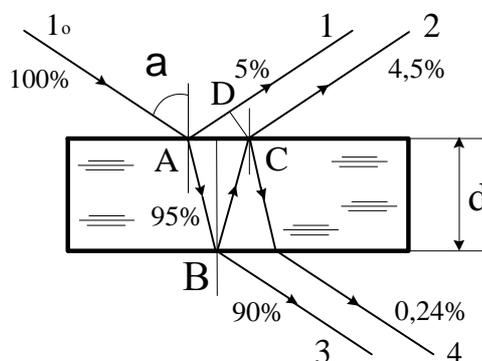


Рис. 5.4. Получение когерентных волн путем деления волны по амплитуде

Поскольку интерферирующие лучи 1–2, при условии, что пластинка плоскопараллельная, будут параллельными, то интерференционная картина будет локализована на бесконечности, и для ее наблюдения следует использовать собирающую линзу. В фокальной плоскости этой линзы и будет наблюдаться интерференционный эффект.

Если пленка будет клиновидной, то интерференционная картина будет локализована на поверхности пленки, где интерферирующие лучи пересекаются.

Форма интерференционных полос определяется геометрическим местом точек пространства, для которых оптическая разность хода будет одинаковой. Так для клиновидной пленки интерференционная картина будет в виде полосок, параллельных ребру клина.

Для получения уравнений, определяющих условия усиления и ослабления волн при интерференции света в тонкой пластинке (рис. 5.4) определим оптическую разность лучей 1 и 2. Отметим, что геометрическая разность хода лучей определяется между точками фронта волны до ее разделения и после ее разделения. Поскольку в рассматриваемом примере лучи 1 и 2 параллельны, то фронт волны после разделения перпендикулярен этим лучам и определяется точками отрезка DC.

Как видно из рисунка, геометрическая разность хода данных лучей равна:

$$\Delta r = AB - DCAD \quad (5.19)$$

При нахождении оптической разности хода учтем два обстоятельства:

1) лучи 1 и 2 распространяются в разных оптических средах, первый только в среде с абсолютным показателем преломления  $n_1$ , второй – только в пластинке с абсолютным показателем преломления  $n_2$ ,

2) первый луч отражается от оптически более плотной среды, поэтому при его отражении происходит потеря полуволны  $\lambda_1/2$ . С учетом сказанного оптическая разность хода  $\delta$  этих лучей определяется соотношением:

$$\delta l = (AB + BC) n_2 AD_{21} / \lambda_1 \quad (5.20)$$

Выражая AB, BC AD через толщину пластинки  $d$  из рис. 5.4, получим:

$$AB = \frac{AE d}{\cos \theta}, \quad BC = AC d \sin \theta, \quad AD = d \cos \theta \quad (5.21)$$

Тогда в соответствии с условиями (5.20) и (5.21) оптическая разность хода  $\delta$  будет определяться выражением:

$$\delta = d \frac{2n_2 \sin^2 \theta}{\cos \theta} - \frac{\lambda_1}{2} \quad (5.22)$$

Используя закон преломления света (4.2) и условие (5.22), получим выражение для оптической разности хода  $\delta$  в виде:

$$\delta = d \frac{2n_2 \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \theta}}{\cos \theta} - \frac{\lambda_1}{2} \quad (5.23)$$

где  $\lambda_1$  – длина волны света в среде, окружающей пластинку, по определению она равна:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{n_1} = \frac{c}{n_1} = \frac{\lambda_0}{n_1} \quad (5.24)$$

$\lambda_0$  – длина волны света в вакууме.

С учетом выражений (5.17, 5.18), (5.23, 5.24) условие усиления света при интерференции света от плоскопараллельной пластинки в отраженном свете определяется выражением:

$$d \frac{2n_2 \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \theta}}{\cos \theta} - \frac{\lambda_0}{n_1} = m \lambda_0 \quad (5.25)$$

Условие ослабления в отраженном свете имеет вид:

$$d \frac{2n_2 \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \theta}}{\cos \theta} - \frac{\lambda_0}{n_1} = (m + \frac{1}{2}) \lambda_0 \quad (5.26)$$

В проходящем свете потери полуволны не происходит, поэтому условия усиления и ослабления в проходящем свете оказываются противоположными условиям усиления и ослабления в отраженном свете.

### **Контрольные вопросы по теме «Интерференция световых волн»**

1. Что называется интерференцией световых волн?
2. Какие световые волны называются когерентными?
3. Объясните влияние инерционности приемников световых волн на возможность наблюдения с помощью них интерференции.
4. Объясните, почему с помощью обычных, нелазерных, источников света невозможно получить интерференционный эффект?
5. Как связаны между собой амплитуда и интенсивность световой волны?
6. Как связаны между собой разность хода и разность фаз интерферирующих световых волн?
7. Сформулируйте условия усиления и ослабления световых волн при интерференции.
8. Объясните, почему увеличение линейных размеров источников света приводит к ухудшению интерференционного эффекта?
9. При каких условиях имеет место интерференция световых волн?
10. Какими способами получают когерентные световые волны?
11. Объясните, почему в опыте с кольцами Ньютона интерференционные полосы имеют вид концентрических колец? Почему с удалением от центра интерференционной картины ширина колец уменьшается, а при больших расстояниях от центра интерференционная картина вообще исчезает?
12. Каким способом получают когерентные волны в опыте Ллойда?
13. Каким будет интерференционный эффект, если оптическая разность хода равна: а)  $2,5\lambda$ ; б)  $7\lambda$ ?  $\lambda$  – длина световой волны.

### **3. Дифракция световых волн**

**Общие сведения.** Интерференция с достаточной убедительностью доказывала наличие у света волновых свойств. Вместе с тем с позиций волновой теории достаточно трудно было понять закон прямолинейного распространения света в оптически однородной среде. Было замечено, что при распространении света через оптически неоднородные среды, кроме известных явлений отражения и преломления света, наблюдаются другие специфические явления, приводящие к отклонению световых волн от прямолинейного распространения и не связанного с отражением и преломлением света. Эти явления получили название дифракционных явлений. Они были известны еще в XVI – XVII вв., однако их объяснение было дано лишь в XIX в.

*Под дифракцией понимают совокупность явлений, возникающих при ограничении фронта световой волны и обусловленных волновой природой света, приводящих к перераспределению интенсивности световых волн за преградой,*

*а также отклонению распространения света от прямолинейного, не связанному с отражением и преломлением* <sup>5</sup>.

Ограничение фронта световой волны может быть обусловлено различными физическими факторами: отверстиями в непрозрачных экранах, границами раздела прозрачной и непрозрачной оптической среды, и другими резко выраженными оптическими неоднородностями среды, например, атомами или молекулами вещества (при прохождении рентгеновских волн через кристаллы).

Анализ дифракционных явлений позволил показать приближенный характер законов геометрической оптики, выяснить границы применимости этих законов. Кроме того, явление дифракции сыграло выдающуюся роль, как в подтверждении волновой природы света, так и становлении корпускулярно-волнового дуализма материи.

Основной задачей, возникающей при решении проблемы дифракции, является установление физических причин, приводящих к ее возникновению, и установление закономерностей распределения интенсивности волны за преградой. Как показал анализ явлений интерференции и дифракции, между ними нет физической разницы. Оба явления заключаются в перераспределении интенсивности когерентных волн в результате их суперпозиции. Перераспределение интенсивности, происходящее вследствие суперпозиции волн, возбуждаемых конечным числом дискретных когерентных источников, называют интерференцией. Перераспределение же интенсивности, возникающее вследствие суперпозиции волн, возбуждаемых непрерывно расположенными когерентными источниками, исторически принято называть дифракцией.

Различают два вида дифракции: 1) дифракция Френеля; 2) дифракция Фраунгофера.

Дифракция Френеля – это дифракция, наблюдаемая в сходящихся или расходящихся лучах. При этом расстояния от источника света до преграды и до места наблюдения являются конечными. Дифракцию света, наблюдаемую в параллельных лучах, называют дифракцией Фраунгофера. Существует критерий, позволяющий различить, какой вид дифракции будет иметь в каждом конкретном случае. Первый вид дифракции имеет в основном теоретический интерес и служит для проверки теоретических выводов, дифракция Фраунгофера нашла широкое научное и практическое применение.

---

<sup>5</sup> Отметим, что нередко в учебной литературе под дифракцией световых волн понимают огибание волной препятствий, что в неполной мере отражает сущность данного физического явления. Так, например, при наблюдении дифракции Френеля на круглом отверстии в зависимости от диаметра отверстия против его центра на экране может наблюдаться либо минимум, либо максимум освещенности.

**Принцип Гюйгенса–Френеля. Доказательство прямолинейности распространения света.** Как отмечено выше, одной из трудностей волновой теории было объяснение прямолинейности распространения света в однородной среде.

Расчет амплитуды волны при дифракции на преградах, а также разрешение указанной выше трудности можно выполнить на основе принципа Гюйгенса–Френеля, представляющего собой развитие принципа Гюйгенса на основе идеи Френеля о когерентности вторичных волн и их интерференции при наложении. *Принцип Гюйгенса–Френеля можно сформулировать следующим образом: каждая точка фронта волны является источником вторичных когерентных сферических волн, результат интерференции которых определяет интенсивность волны в любой последующий момент времени.*

Рассмотрим в качестве иллюстрации применение данного принципа для доказательства закона о прямолинейности распространения света в однородной среде. В общем случае расчет амплитуды волны в любой точке на основе указанного принципа представляет сложную математическую задачу. В случаях, отличающихся симметрией, решение этой и подобных задач может быть реализовано достаточно просто и наглядно на основе метода разбиения волновых поверхностей, предложенного Френелем.

Суть этого метода состоит в следующем. Пусть от точечного источника света  $L$  распространяется сферическая волна, см. рис. 6.1. Для некоторого момента времени волновая поверхность  $S$  занимает место, указанное на рисунке. Соединим точку  $S$  с некоторой произвольной точкой  $N$ , из которой наблюдается процесс распространения световой волны. Точка  $O$  есть точка пересечения отрезка  $LN$  с волновой поверхностью  $S$ .

Согласно Френелю, разобьем волновую поверхность на зоны так, чтобы расстояния от краев соседних зон до точки наблюдения  $N$  отличались на расстояние, равное  $\lambda/2$ .

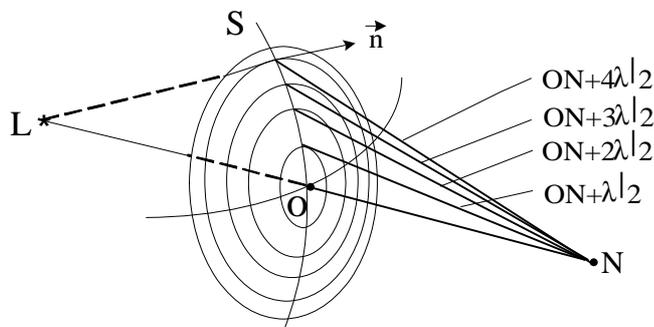


Рис. 6.1. Схема построения зон Френеля.

При этом волновая поверхность разбивается на зоны, имеющие форму сферических колец. Первая зона имеет форму сферического сегмента. Для дальнейших расчетов изобразим зону Френеля с номером  $k$  в сечении, совпадающим с плоскостью рисунка (рис. 6.2).

Согласно принципу Гюйгенса – Френеля, амплитуда волны испускаемой вторичным источником, в данном случае зоной Френеля с номером  $k$ , пропорциональна площади этой зоны  $\Delta S_k$  и зависит от угла  $\alpha$  между нормалью к этой зоне  $\vec{n}$  и направлением от нее до точки наблюдения  $N$ .

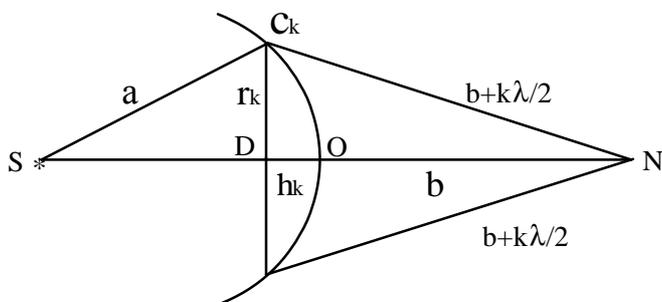


Рис. 6.2. К определению радиуса зон Френеля  $r_k$ .

Из рис. 6.1 видно, что угол между нормалью  $\vec{n}$  к волновой поверхности в данной зоне и направлением распространения волны от данной зоны до точки  $N$  с ростом номера зоны  $k$  монотонно увеличивается от 0 до  $\pi/2$ , а площадь каждой зоны  $\Delta S_k$ , как показывает элементарный расчет, остается практически одинаковой и равной примерно:

$$\Delta S_k \approx \pi ab \quad (6.1)$$

Отсюда следует, что амплитуда волны, испускаемой данной зоной Френеля, монотонно убывает с увеличением номера зоны.

Поскольку разность хода световых волн, приходящих от соседних зон, составляет  $\lambda/2$ , то соседние зоны создают в точке наблюдения  $N$  колебания в противофазе. В этом случае амплитуду результирующего колебания в точке  $N$  можно представить в виде ряда:

$$E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots + E_{k+1} \quad (6.2)$$

где  $k$  – целое число, равное 1, 2, 3, ...

Запишем выражение (6.2) в виде:

$$E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots + E_{k+1} = \frac{E_{ok2\pi}}{2} \quad (6.2')$$

Так как амплитуды колебаний монотонно убывают, то выражения, стоящие в скобках, будут равны 0, и для результирующей амплитуды получаем выражение:

$$E_{рез.} \approx \frac{E_{o1}}{2}. \quad (6.3)$$

Из формулы (6.3) следует, что действие всего фронта волны в точке наблюдения  $N$  для произвольного момента времени сводится к действию всего лишь половины первой зоны Френеля. Из  $\Delta SC_k D$  (рис. 6.2) можно определить радиус  $k$ -ой зоны Френеля. Используя теорему Пифагора и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим для радиуса  $k$ -ой зоны Френеля выражение:

$$rk = \sqrt{\frac{ab}{ak}}. \quad (6.4)$$

Из формулы (6.4) можно оценить радиус первой зоны Френеля для видимого света. Пусть  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6}$  м,  $a = b = 1$  м, тогда  $r_1 = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м = 0,5 мм. Таким образом, с учетом изложенного выше, следует, что свет от источника  $L$  в произвольную точку наблюдения  $N$  идет только от половины первой зоны Френеля, т.е. как бы вдоль узкого канала диаметра 0,5 мм, а это и означает, что свет в однородной среде распространяется прямолинейно.

Из этих же рассуждений следует вывод, что чем меньше радиус первой зоны Френеля, тем больше цилиндрический канал, образуемый первой зоной Френеля, похож на луч и в пределе этот цилиндрический канал стягивается в линию, являющуюся осью этого цилиндра.

Как видно из формулы (6.4), радиус первой зоны Френеля стремится к 0 при конечных значениях  $a$ ,  $b$  и  $k$ , если  $\lambda \rightarrow 0$ . Это и означает, что геометрическая оптика является предельным случаем волновой оптики, когда  $\lambda \rightarrow 0$ .

**Дифракция Френеля.** В качестве примера дифракции Френеля рассмотрим дифракцию на круглом отверстии. Пусть свет от точечного источника света ограничивается бесконечной непрозрачной преградой в виде плоскости, в которой имеется отверстие радиуса  $r_o$ . Эта плоскость перпендикулярна лучу света, см. рис. 6.3(а).

Исследуем вначале освещенность на экране в точке  $N$ , лежащей на луче  $LN$ , проходящем через центр отверстия, в зависимости от числа зон Френеля, укладывающихся на отверстии экрана радиуса  $r_o$ . Для этого в формулу (6.4) вместо радиуса  $k$ -ой зоны подставим радиус отверстия, имеющегося в преграде, тогда получим условие, определяющее число зон Френеля, укладывающихся на данном отверстии:

$$k = \frac{r_0^2(\theta)}{abl} + \dots \quad (6.5)$$

Из формулы (6.5) следует, что число зон, укладывающихся на отверстие, будет конечным, поэтому результирующая амплитуда колебаний в точке  $N$  экрана, как следует из ряда (6.2'), будет определяться выражением:

$$E_{рез.} = \pm \frac{EE_{0k}}{22} \dots \quad (6.6)$$

В выражении (6.6) знак плюс берется для нечетных значений  $k$ , знак минус – для четных.

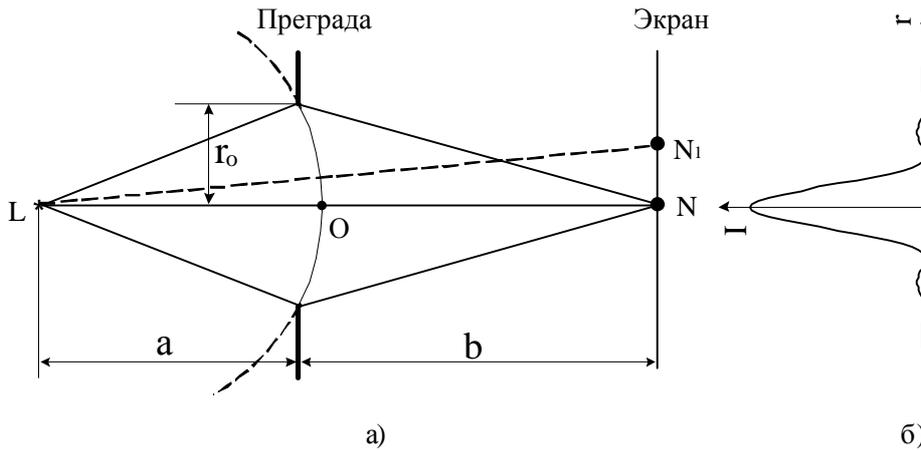


Рис. 6.3. Дифракция Френеля на круглом отверстии. а) схема опыта; б) распределение интенсивности световой волны  $I$  как функции расстояния от центра дифракционной картины - точки  $N$ .

Если число зон, открываемых преградой, будет невелико, то значения амплитуд  $E_{o1}$  и  $E_{ok}$  отличаются незначительно. В этом случае при нечетном числе  $k$  результирующая амплитуда колебаний в точке  $N$  будет определяться амплитудой волны, излучаемой первой зоной Френеля, т.е.  $E_{рез.} = E_{o1}$ . Если  $k$  будет четным, то  $E_{рез.} = 0$ . На рис. 6.3 (а) точка  $N$  соответствует нечетному числу зон Френеля.

При смещении точки наблюдения от центра дифракционной картины, точка  $N_1$  и далее, в силу симметричного расположения отверстия относительно прямой  $LN$ , освещенность в разных точках экрана будет зависеть только от их расстояния  $r$  от точки  $N$ . На рис. 6.3(б) показано примерное распределение интенсивности световой волны  $I$  как функции расстояния  $r$  от центра дифракционной картины – точки  $N$ , в плоскости рисунка.

**Дифракция Фраунгофера на щели.** Наибольший практический интерес представляет дифракция, наблюдаемая в параллельных лучах. Ее, как указано выше, называют дифракцией Фраунгофера. Принципиальная схема наблюдения дифракции Фраунгофера на щели представлена на рис. 6.4.

Параллельный пучок света, создаваемый точечным источником света  $L$ , помещенным в главном фокусе собирающей линзы  $L_1$ , падает на узкую длинную щель, образованную двумя непрозрачными параллельными плоскостями.

Для наблюдения дифракционного эффекта от щели на бесконечности после щели помещают собирающую линзу  $L_2$ . В фокальной плоскости этой линзы и наблюдают дифракционный эффект.

Задачей дифракции в этом случае является нахождения распределения освещенности на экране, помещенном за преградой в фокальной плоскости линзы  $L_2$ .

Пусть ширина щели будет  $b$ , длина щели  $l$  бесконечна (в реальных условиях ее можно считать таковой, если имеет место условие:  $b \ll l$ ). На щель нормально ее плоскости падает плоская монохроматическая волна длиной волны  $\lambda$ .

Найдем распределение интенсивности света в фокальной плоскости линзы, расположенной за преградой. Для этого воспользуемся принципом Гюйгенса–Френеля, согласно которому каждая точка фронта волны является источником вторичных сферических когерентных волн. По своей сути данная задача будет сводиться к определению результирующей волны при интерференции света, идущего от непрерывной последовательности когерентных источников.

Определим вначале направления, вдоль которых происходит усиление когерентных волн, а затем найдем распределение интенсивности дифрагированной волны в функции угла наблюдения.

Рассмотрим любое направление распространения волны после преграды, задаваемое углом  $\varphi$  (рис. 6.5).

Для расчета амплитуды результирующей волны в точке  $N$  воспользуемся вначале графическим методом (методом векторных диаграмм), а затем соче-

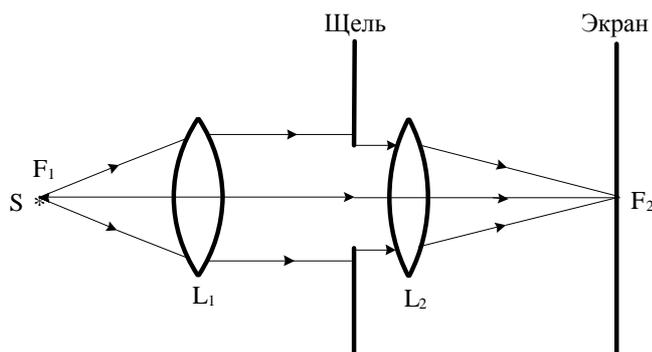


Рис. 6.4. Схема наблюдения дифракции Фраунгофера

танием графического и аналитического методов. Для этого разобьем фронт волны на равные полоски, параллельные краям щели (эти полоски уже, чем зоны Френеля).

Пусть амплитуда колебания, возбуждаемого одной зоной в точке  $N$ , будет равна  $\dot{E}_{oi}$ . Тогда амплитуда результирующего колебания в этой же точке в соответствии с принципом суперпозиции будет определяться выражением:

$$\mathbf{r} \mathbf{r} \mathbf{E} \mathbf{E}_{\phi i} = \sum_{i=1}^K \quad , \quad (6.7)$$

где  $K$  – число зон, на которое разбивается фронт волны на открытом участке  $AB$  (рис. 6.5).

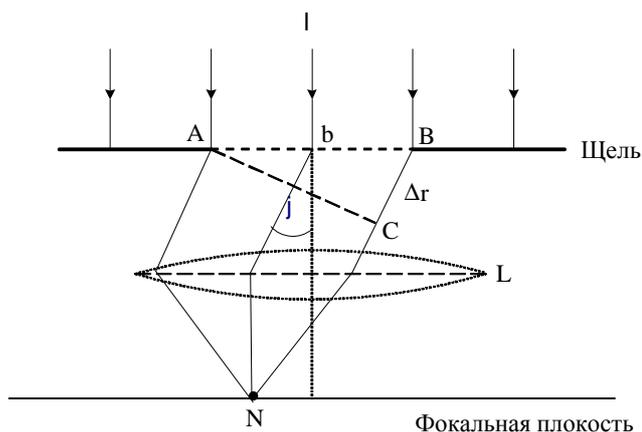


Рис. 6.5. Дифракция света на щели. К расчету разности фаз волн, идущих от краев щели в направлении, задаваемом углом  $\varphi$ .

Разность фаз будем определять между точками фронта волны до прохождения преграды – это точки отрезка  $AB$ , являющегося пересечением фронта волны с плоскостью рисунка, и точками фронта волны после прохождения преграды. Так как мы исследуем дифракцию в параллельных лучах, то фронт волны после прохождения преграды будет определяться плоскостью, перпендикулярной этим лучам, на рис. 6.5 это отрезок  $AC$ .

Пусть начальная фаза луча, идущего из точки  $A$  щели под углом  $\varphi$  к первоначальному направлению, будет равна 0. Тогда фаза луча, идущего от последней зоны, примыкающей к краю  $B$  щели, будет определяться разностью хода  $BC = \Delta r$ . Из прямоугольного треугольника  $ABC$  (рис. 6.5) видно, что разность хода  $BC = AB \cdot \sin \varphi = b \cdot \sin \varphi$ .

С учетом этого разность фаз волн, идущих от первой и последней зон, будет определяться выражением:

$$dp = 2 \cdot \frac{b \sin j}{l} \quad (6.8)$$

Так как ширина всех зон одинакова, то разность хода, а следовательно, и разность фаз между колебаниями, возбуждаемыми соседними зонами, будет также одинакова и равна

$$dd = K/ \quad (6.9)$$

На рис. 6.6. представлен результат графического сложения колебаний, создаваемых всеми зонами в точке  $N$  для произвольной разности фаз между первой и последней зонами. Угол между векторами, характеризующими амплитуду волны, испускаемой соседними зонами, равен  $\delta_1$ . Результирующий вектор  $E_{oj}$  изобразится вектором, замыкающим начало первого и конец последнего векторов.

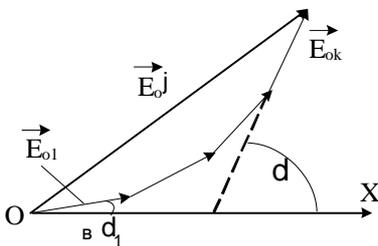


Рис. 6.6. Дифракция на щели. Графическое определение результирующей амплитуды .

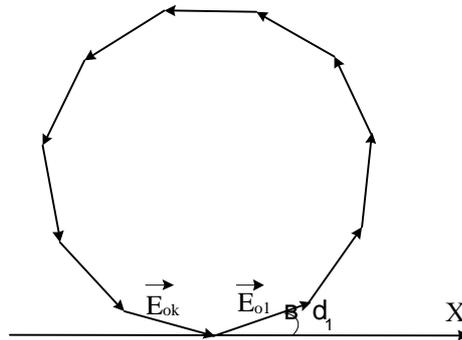


Рис. 6.7. Результат графического сложения амплитуд при разности фаз между излучением первой и последней зон, равной  $2k\pi$ .

Представляют интерес два случая: 1) разность фаз колебаний, возбуждаемых первой и последней зонами, составляет  $2\pi$  или  $k2\pi$ ; 2) разность фаз равна 0. Ограничиваясь малыми углами дифракции, можно считать, что

$|E_{oj}| \approx \text{const}$ . В этом случае общая длина ломаной линии, образованной векторами, будет неизменной. Разным значениям углов  $\varphi$  будет соответствовать разная степень закручивания ломаной линии. Первый случай иллюстрируется векторной диаграммой,

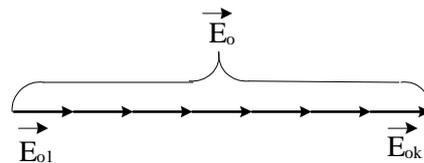


Рис. 6.8. Результат графического сложения амплитуд при разности фаз, равной 0.

представленной на рис. 6.7, второй на рис. 6.8. Разность фаз равна 0, как видно из формулы (6.9), только при  $\varphi = 0$ . Это означает, что для этого направления амплитуда, а следовательно, и интенсивность будут максимальными.

Для первого случая видим, что замыкающий вектор равен 0. Это означает, что при этом условии в направлении точки  $N$  будет иметь место минимум дифракции. Из формулы (6.9) получаем условие ослабления волн:

$$d \sin \theta = k \lambda \quad \text{Откуда: } \sin \theta_{\text{мин.}} = \frac{k \lambda}{d} \quad (6.10)$$

Формула (6.10) определяет те направления относительно первичного пучка, для которых интенсивность дифрагированных лучей равна 0.

Для определения углового распределения интенсивности дифрагированной волны воспользуемся сочетанием графического и аналитического методов. Для этого зоны сделаем бесконечно малыми. Тогда рис. 6.6. примет вид, представленный на рис. 6.9.

При малых углах  $\varphi$  длина дуги  $AB$  остается примерно постоянной и равной амплитуде суммарной волны  $E_0$ . Поскольку разность фаз между соседними зонами будет изменяться на одну и ту же малую величину, то дуга  $AB$  будет постепенно закручиваться и представлять собой часть дуги окружности радиуса  $R$ .

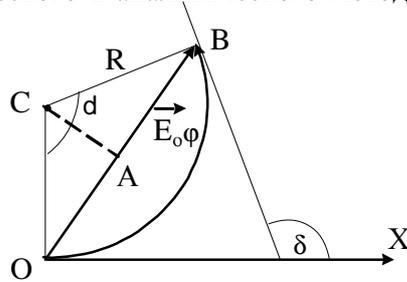


Рис. 6.9. К выводу зависимости интенсивности от направления при дифракции на щели.

Из рис. 6.9 видно, что  $\angle OCB = d$ , как углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

Для определения интенсивности суммарной волны в направлении, определяемом углом  $\varphi$ , следует определить амплитуду суммарной волны  $|E_{\text{сум}}|$ , равную длине хорды  $OB$ . Из  $\triangle ABC$  (рис. 6.9) имеем:  $AB = \sin \frac{d}{2}$ , кроме того, из рисунка видно, что дуга  $OB$  равна  $(\delta \cdot R)$ .

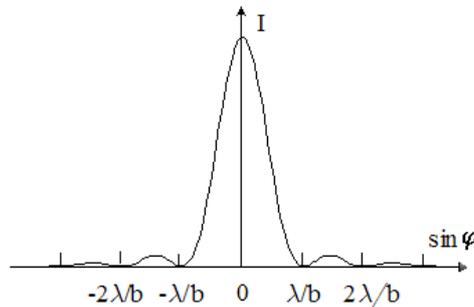


Рис. 6.10. График зависимости интенсивности световой волны от  $\sin \varphi$  при дифракции на щели.

Учитывая, что  $AB = \frac{1}{2} E_{0\varphi}$ , а дуга  $OB$  равна  $E_0$ , получаем для амплитуды волны, наблюдаемой на экране под углом  $\varphi$  выражение:

$$E_{\varphi} = \frac{\sin(\frac{\delta R}{2})}{(\frac{\delta R}{2})} \frac{E_0}{2}, \quad (6.11)$$

где  $\delta$  определяется формулой (6.8).

Так как интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды волны, то из формулы (6.11) следует выражение для интенсивности волны, проходящей через преграду, в виде:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}, \quad (6.12)$$

где  $I_0$  – интенсивность волны в середине дифракционной картины,  $I_\varphi$  – интенсивность в точке, положение которой определяется данным значением угла  $\varphi$ .

На рис. 6.10 представлен график функции (6.12), определяющей зависимость интенсивности волны от синуса угла дифракции  $\varphi$ . Из рисунка качественно видно, что основная энергия волны после прохождения щели сосредоточена в главном максимуме, лежащем между первыми симметричными дифракционными минимумами.

Из формулы (6.12) можно получить условия, при которых наблюдаются минимумы дифракции света на щели, используя известное из тригонометрии условие равенства нулю синуса функции:  $\sin \alpha = 0$ , если  $\alpha = k\pi$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Дробь в выражении (6.12) равна нулю, если числитель ее равен нулю, отсюда следует, условие минимума:

$$\frac{d \sin \alpha}{2} = k\pi \sin \frac{\alpha}{2} \quad (6.13)$$

Из формулы (6.5) можно установить критерий, позволяющий определить, какой вид дифракции от данной преграды будет иметь в каждом конкретном случае: Френеля или Фраунгофера. Пусть на преграду падает плоская волна. В этом случае  $a = \infty$ , и, как следует из формулы (6.5), число зон Френеля, открываемых данной преградой, будет определяться выражением:

$$k = \frac{r_0^2}{b\lambda}. \quad (6.14)$$

Дифракция Фраунгофера по определению – это дифракция, наблюдаемая на бесконечном от преграды расстоянии ( $b = \infty$ ). Тогда при конечных значениях размера преграды  $r_0$  и длины волны  $\lambda$  и бесконечно большом значении  $b$  дробь (6.14) будет намного меньше 1. Так как  $k$  – это число зон Френеля, открываемых преградой, то отсюда следует вывод, что если преграда открывает лишь малую часть первой зоны Френеля, то на этой преграде имеет место дифракция Фраунгофера.

**Дифракция Фраунгофера на одномерной решетке.** Практически важным случаем дифракции Фраунгофера, является дифракция света на

совокупности длинных узких щелей, одинаковой ширины и разделенных одинаковыми непрозрачными полосами. Такую совокупность равноотстоящих щелей называют одномерной дифракционной решеткой.

На рис. 6.11 представлена принципиальная схема наблюдения дифракции на одномерной решетке  $ДР$ . Пунктирными вертикальными линиями указаны направления световых лучей до прохождения их через дифракционную решетку. Для наблюдения дифракции Фраунгофера после решетки помещают собирающую линзу  $Л$ , в ее фокальной плоскости наблюдают дифракционный эффект.

Пусть на решетку падает плоская монохроматическая волна длиной волны  $\lambda$ . Рассмотрим особенности ее прохождения через одномерную решетку.

Сумму ширины щели и непрозрачных промежутков между щелями называют периодом дифракционной решетки  $d$ . Выберем произвольное направление относительно первичного луча, определяемое углом  $\varphi$ , и проанализируем зависимость амплитуды и интенсивности волны, прошедшей через решетку в функции угла  $\varphi$  между этими направлениями.

Интенсивность волны в точке  $N_0$ , лежащей вдоль первоначального хода лучей  $ON_0$ , будет максимальной, т.к. разность хода волн, идущих от всех щелей в данном направлении, равна нулю, что соответствует условию усиления волн при интерференции. Заметим, что линза  $Л$  не вносит дополнительной разности хода для лучей, проходящих через нее.

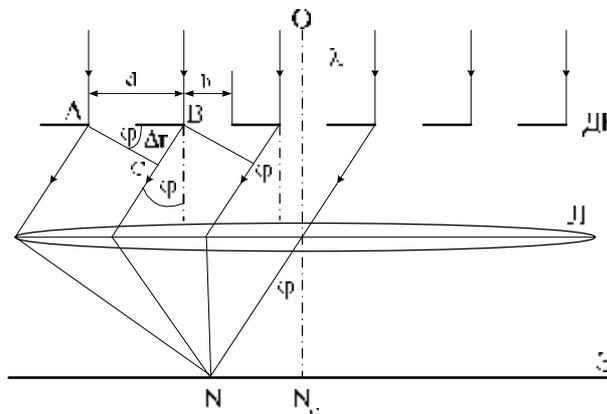


Рис. 6.11 Схема наблюдения дифракции на одномерной решетке.

Интенсивность волны в любой точке экрана  $N$  (рис. 6.11) будет определяться двумя факторами: дифракцией света на каждой щели и интерференцией многих волн, идущих от всех щелей дифракционной решетки.

В тех направлениях, в которых наблюдаются дифракционные минимумы, будут иметь место и минимум интерференции, см. формулу (6.13). Наряду с дифракционными минимумами будут иметь место минимумы, определяемые интерференцией, см. формулу (5.18).

Как видно из рис. 6.11, разность хода лучей  $\Delta r$ , идущих от соответствующих точек соседних щелей, точки  $A$  и  $B$ , равна длине отрезка  $BC$ . Из  $\triangle ABC$

имеем:  $\Delta r = BC = AB \cdot \sin \varphi = d \cdot \sin \varphi$ . Тогда условие интерференционных минимумов в данном случае примет вид:

$$d \sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{2}, \quad (6.15)$$

где  $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ . Мы здесь учли, что все дифрагированные лучи идут в одной среде, и обычно в воздухе, следовательно,  $n_1 = n_2 \approx 1$ , а  $\lambda \approx \lambda_0$ , т.е. длина волны равна длине волны света в вакууме.

Направления интерференционных максимумов для дифракционной решетки будут определяться условием (5.17), которое в данном случае примет вид:

$$d \sin \varphi = k \lambda, \quad (6.16)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Число  $k$  называют порядком максимума. Направления, определяемые условием (6.16), называют главными дифракционными максимумами. Это название связано с тем, что при более детальном анализе процесса дифракции на решетке выявляются максимумы, интенсивность которых составляет не более 4–5% от интенсивности ближайших к ним главных максимумов.

Из формулы (6.16) можно сделать три вывода: 1) число главных максимумов ограничено, и наибольшее значение  $k$  определяется условием:  $k = d/\lambda$ , т.к. значение синуса не может превышать единицы; 2) дифракционная картина является симметричной относительно первичного луча, проходящего через главный фокус линзы; 3) положения главных максимумов, за исключением только центрального максимума ( $k = 0$ ), зависят от длины волны света. Из последнего вывода следует, что дифракционная решетка обладает способностью разлагать падающий на нее свет по длинам волн. Если, к примеру, на решетку падает белый свет, то все дифракционные максимумы, кроме нулевого, будут окрашены, т.е. разложатся в спектр. Причем фиолетовый участок спектра будет располагаться ближе к центру дифракционной картины, а красный участок окажется дальше от ее центра.

Таким образом, дифракционная решетка может служить в качестве прибора, анализирующего спектральный состав падающей на него световой волны.

Основными характеристиками дифракционной решетки как спектрально-го прибора являются угловая и линейная дисперсия, разрешающая способность. Угловая дисперсия решетки  $D$  характеризует способность решетки разделять на некоторый угол две спектральные линии, отличающиеся длиной волны на единицу, например на 1 м или на 1 Å, и определяется выражением:

$$D = \left| \frac{d\varphi}{d\lambda} \right|, \quad (6.17)$$

где  $d\varphi$  – угловое расстояние на дифракционной картине между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на  $d\lambda$ .

Из формулы (6.16) и (6.17) следует выражение для угловой дисперсии дифракционной решетки в виде:

$$D = \left| \frac{d\beta}{d\alpha} \right| = \frac{dl}{d\lambda} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (6.18)$$

Линейной дисперсией называют величину, определяемую выражением:

$$D_{\text{лин.}} = \frac{dl}{d\lambda}, \quad (6.19)$$

где  $dl$  – расстояние на экране или фотопленке между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на  $d\lambda$ . Для небольших значений углов дифракции  $dl \approx F \cdot d\alpha$ , тогда с учетом (6.17-6.19) линейная дисперсия дифракционной решетки будет определяться выражением:

$$D_{\text{лин.}} = \frac{dF d}{d\lambda} = \frac{F}{d} \cdot \frac{d}{d\lambda}. \quad (6.20)$$

Разрешающая способность решетки  $R$  характеризует ее возможность давать отдельно дифракционное изображение близких спектральных линий и по определению равна:

$$R = \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (6.21)$$

где  $d\lambda$  – минимальная разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются отдельно.

Рис. 6.12 иллюстрирует понятие разрешающей способности дифракцион-

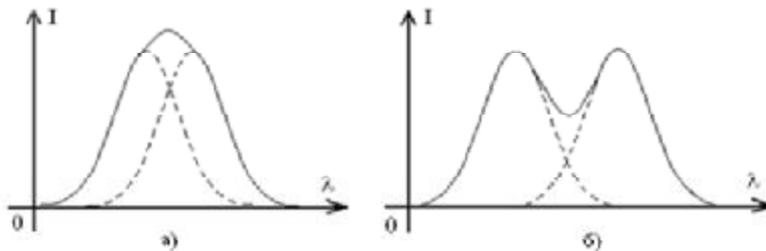


Рис. 6.12. К понятию разрешающей способности дифракционной решетки.  
 а - Две спектральные линии с близкими частотами (они указаны пунктирными кривыми) при данном взаимном расположении воспринимаются как одна линия;  
 б - если минимум одной линии совпадает с максимумом другой, то визуально они воспринимаются как две отдельные линии.

ной решетки. На этом рисунке представлены две возможные ситуации, которые могут наблюдаться в дифракционной картине при прохождении через решетку двух световых волн с небольшой разницей в длине световой волны. Пунктиром обозначены контуры спектральных линий, какими бы они выглядели на экране

при раздельном падении на решетку, а сплошными линиями – картины, наблюдаемые при одновременном прохождении этих волн через решетку. В случае а) две линии воспринимается как одиночная линия, в случае б) максимум первой линии приходится на край максимума второй линии и глаз воспринимает две линии как раздельные. Второй случай соответствует критерию, предложенному Рэлеем. Из формулы (6.21) и критерия Рэля следует формула для разрешающей способности дифракционной решетки в виде

$$R \leq \frac{\lambda}{N}, \quad (6.22)$$

где  $k$  – порядок дифракционного максимума,  $N$  – число щелей в дифракционной решетке.

**Дифракция на трехмерной решетке. Уравнение Брэгга–Вульфа.** Другим важным теоретическим и практическим примером дифракции Фраунгофера является дифракция рентгеновских лучей на трехмерной решетке. Как известно из раздела «Молекулярная физика и термодинамика», кристаллы – это твердые тела, в которых атомы или молекулы располагаются периодически в трех измерениях. Причем период повторяемости в расположении атомов или молекул составляет порядка 0,1 нм, что по порядку величин соответствует длинам волн мягкого рентгеновского излучения, используемого для структурных исследований, поэтому кристаллы представляют для указанных волн естественную трехмерную дифракционную решетку.

Существуют различные способы анализа дифракции рентгеновских волн на кристаллах. Наиболее простой, и в то же время достаточно эффективный способ был предложен в 1913 г. английским физиком У. Л. Брэггом и независимо от него российским ученым Г. В. Вульфом.

Если рассматривать кристалл как совокупность атомных плоскостей, отстоящих друг от друга на расстоянии  $d$ , называемом межплоскостным расстоянием, то процесс дифракции можно представить как процесс отражения рентгеновских волн от системы этих атомных плоскостей.

Атомные плоскости – это плоскости, проходящие через центры тяжести атомов или молекул данного кристалла. При этом от атомных плоскостей отражаются лучи только под такими углами скольжения, для которых разность хода в направлении отражения удовлетворяет условию интерференционного усиления. В этих направлениях и наблюдаются дифракционные максимумы.

Получим уравнение Брэгга–Вульфа, определяющее направления дифрагированных максимумов от данного семейства атомных плоскостей. На рис. 6.13 представлен соответствующий ход лучей. Отметим, что при анализе дифракции рентгеновских лучей принято задавать направление падающих

лучей углом скольжения  $J$  – углом между лучом и данным семейством атомных плоскостей.

Кружочками условно обозначены атомы кристалла. Атомные плоскости проходят через совокупности атомов перпендикулярно плоскости рисунка. Падающий луч отражается от атомных плоскостей. Для примера на рис. 6.13 показано три атомных плоскости и соответственно три отраженных луча 1, 2, 3.

После отражения фронт волны определяется отрезком  $AC$ . Из рисунка видно, что разность хода  $\Delta r$  луча 1 и 2 равна  $(AD + DC)$ . Для лучей, отраженных от нижележащих плоскостей, разность хода будет кратна  $\Delta r$ , т.к. расстояние между соседними плоскостями для данного семейства атомных плоскостей будет одинаковым.

Считая межплоскостное расстояние  $d$  и угол скольжения  $J$  заданными, из прямоугольных треугольников  $ABD$  и  $ADC$  определим разность хода лучей 1 и 2, она оказывается равной  $2d \sin J$ , тогда условие усиления отраженных лучей будет иметь вид:

$$2d \sin J = n \lambda \quad (6.23)$$

Это уравнение называют уравнением Брэгга–Вульфа.

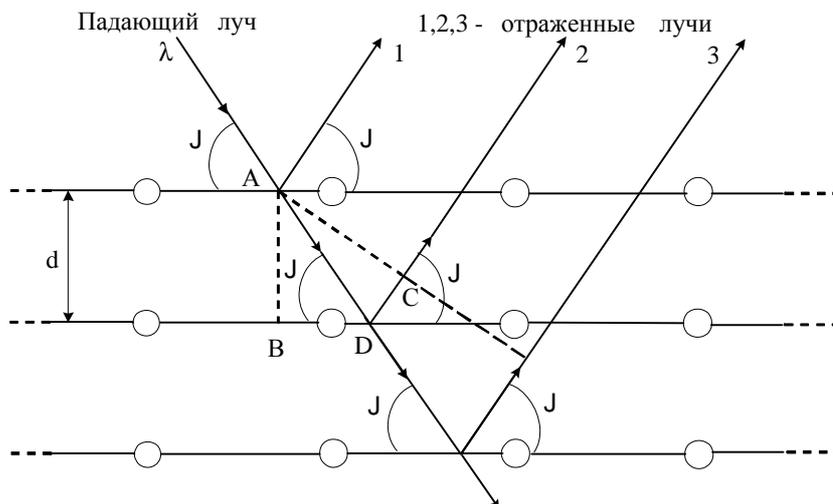


Рис. 6.13. К выводу уравнения Брэгга - Вульфа .

Данное уравнение лежит в основе рентгеновского структурного и спектрального анализа. При известном значении длины волны  $\lambda$ , экспериментально измеряя угол дифракции  $J$ , определяют межплоскостное расстояние  $d$ , и наоборот, при известном значении межплоскостного расстояния (когда известна

структура кристалла), определяют длину волны падающего на кристалл рентгеновского излучения.

### **Контрольные вопросы по теме «Дифракция световых волн»**

1. Что называется дифракцией световых волн?
2. Какие существуют виды дифракции световых волн, и в чем заключается их различие?
3. Сформулируйте принцип Гюйгенса – Френеля.
4. В чем состоит физическая сущность метода зон Френеля? Поясните способ построения зон Френеля.
5. При каких условиях в центре дифракционной картины при дифракции Френеля на круглом отверстии будет наблюдаться минимум освещенности? Как будет изменяться освещенность в центре дифракционной картины, если диафрагму медленно увеличивать?
6. Каковы критерии наблюдения дифракции Френеля и Фраунгофера?
7. При каких условиях дифракционные явления не существенны? При каких условиях они вообще бы не проявлялись?
8. Каковы особенности дифракционной картины при дифракции Фраунгофера на щели? Как будет изменяться вид этой картины при постепенном уменьшении ширины щели?
9. Что называют дифракционной решеткой? Какие существуют виды дифракционных решеток?
10. Как изменится вид дифракционной картины на дифракционной решетке, если вместо монохроматического света на решетку направить белый свет?
11. Как изменится наибольший порядок дифракции при дифракции на решетке, если длину волны света, падающего на нее, увеличить?
12. Какая из двух дифракционных решеток имеет большее угловое разрешение, если первая имеет период  $d_1 = 0,01$  мм, вторая  $d_2 = 0,001$  мм?
13. Межплоскостное расстояние для некоторого семейства атомных плоскостей в кристалле  $d = 2 \lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны рентгеновского излучения. Какой максимальный порядок дифракции может наблюдаться от данных плоскостей?
14. Волны, какого участка видимого света, фиолетового или красного, испытывают большее отклонение при дифракции на решетке?
15. Для каких волн, рентгеновских или инфракрасных, больше подходит понятие светового луча?
16. Несмотря на то, что кристаллы представляют собой периодическую структуру, т.е. образуют трехмерную решетку, дифракция видимого света на них не наблюдается. Почему?
17. По предложению Ю. Вульфа и У. Брэгга, дифракцию рентгеновских лучей на кристаллах можно трактовать как отражение от системы атомных

плоскостей. В чем же заключается принципиальная разница между зеркальным отражением световых лучей и подобной трактовкой?

#### 4. Поляризация световых волн

**Общие замечания.** Из электромагнитной теории света следует, что световые волны являются поперечными. Колебания вектора напряженности электрического и магнитного полей происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения световой волны. Если световая волна является монохроматической, то направление колебаний вектора  $\vec{E}$  остается строго постоянным.<sup>6</sup> Световая волна, в которой направление колебаний вектора  $\vec{E}$  остается постоянным, называется плоскополяризованной, или линейнополяризованной. На рис. 7.1 представлена плоскополяризованная волна:  $P_1$  – плоскость, перпендикулярная вектору скорости света  $\vec{c}$ , плоскость  $P_2$  – плоскость, в которой совершаются колебания вектора  $\vec{E}$ , ее называют плоскостью колебаний. В дальнейшем мы будем вести речь именно о плоскости колебаний вектора  $\vec{E}$ .

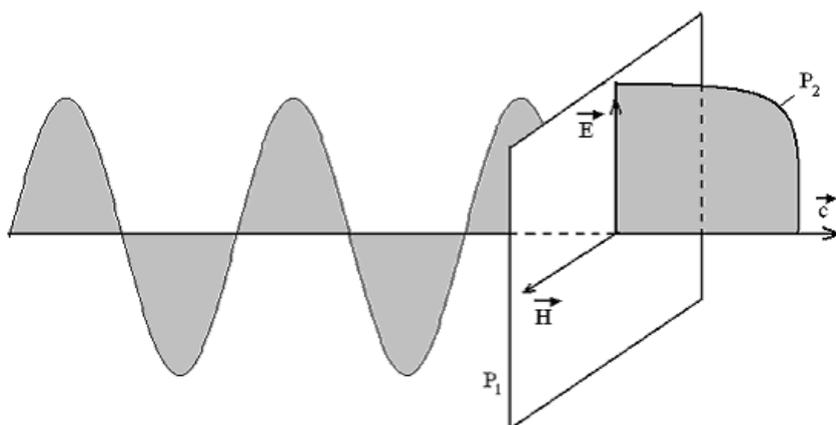


Рис. 7.1. Плоскополяризованная волна. Направление колебаний вектора  $\vec{E}$  со временем не изменяется.

В реальных источниках света световая волна излучается огромным числом элементарных излучателей, атомов. В силу теплового хаотического движения атомов волны, излучаемые ими, не сохраняют неизменной ориентацию плоскости колебаний вектора  $\vec{E}$ . Такой свет называют естественным. В естественном свете плоскость колебаний  $P_2$  электрического вектора испытывает случайные повороты относительно направления, задаваемого вектором скоро-

<sup>6</sup> Заметим, что остается также постоянным и направление колебаний вектора напряженности магнитной компоненты поля  $\vec{H}$ .

сти волны  $\vec{c}$ . В силу огромного числа элементарных излучателей света (атомов или молекул) вектор  $\vec{E}$  будет иметь всевозможные ориентации в плоскости  $P_1$ .

На рис. 7.2(а) представлены колебания вектора  $\vec{E}$  для естественного света, а на рис. 7.2(б) для света, в котором имеются некоторые предпочтительные ориентации в пространстве, который называют частично поляризованным. В частично поляризованном свете модуль вектора напряженности оказывается не одинаковым в разных направлениях.

Дневной свет является практически неполяризованным. Искусственные источники света обладают той или иной степенью поляризации, обычно незначительной<sup>7</sup>.

Более сложным случаем поляризованного света является свет с круговой поляризацией. В таком свете конец вектора  $\vec{E}$  описывает в пространстве винтовую линию, осью которой является вектор скорости световой волны. Различают свет, поляризованный по кругу вправо и влево.

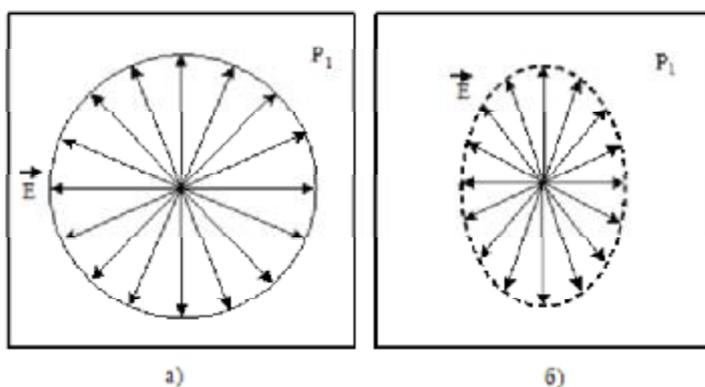


Рис. 7.2. Естественный свет (а); частично поляризованный свет (б).

Плоскополяризованный, или с иным характером поляризации, свет находит широкое применение во многих физических исследованиях и имеет большое прикладное значение, поэтому знание способов его получения и особенностей его распространения в различных средах представляет теоретический и практический интерес.

Укажем два наиболее распространенных метода получения плоскополяризованного света: 1) с помощью явления отражения и преломления света от диэлектрика; 2) с помощью явления двойного лучепреломления.

<sup>7</sup> Заметим, что степень поляризации света определяется разницей между минимальным и максимальным значениями напряженности электрического поля в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

### Поляризация света при отражении и преломлении. Закон Брюстера.

Опыт показывает, что отраженный и преломленный свет всегда частично поляризован. Степень поляризации света зависит от угла падения и относительного показателя преломления двух сред, на границе которых происходит отражение и преломление света. Шотландский физик Д. Брюстер, исследуя явление поляризации света, в 1815 г. установил связь между относительным показателем преломления диэлектрика  $n_{12}$  и углом падения  $\alpha$ , при котором отраженный луч полностью поляризован:

$$\operatorname{tg} \alpha_B = n_{12}, \quad (7.1)$$

где  $\alpha_B$  – угол Брюстера, при котором отраженный луч полностью поляризован. Уравнение (7.1) называют законом Брюстера.

Из раздела «Механические колебания» известно, что если складывать два гармонических колебания одинаковой частоты, совершающихся в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, но с произвольно меняющейся начальной фазой, то получается также гармоническое колебание, но направление результирующего колебания относительно выбранных осей будет изменяться произвольным образом. Это как раз и соответствует колебаниям вектора  $\vec{E}$  в естественном свете.

Справедливым будет и обратное суждение, которое применительно к вопросу о поляризации световых волн будет формулироваться следующим образом: *естественный свет может быть представлен в виде суперпозиции двух плоскополяризованных волн, в которых колебания вектора  $\vec{E}$  происходят в двух взаимно перпендикулярных направлениях, а начальные фазы этих волн изменяются относительно друг друга произвольным образом.* Этот вывод удобно использовать для анализа явлений, связанных с поляризацией света.

Рис. 7.3 иллюстрирует образование

плоскополяризованного света при отражении и преломлении от прозрачного диэлектрика, на основе сформулированного вывода. Стрелками и черными кружочками показано направление колебаний вектора напряженности электрической компоненты световой волны  $\vec{E}$ . Точкам соответствуют колеба-

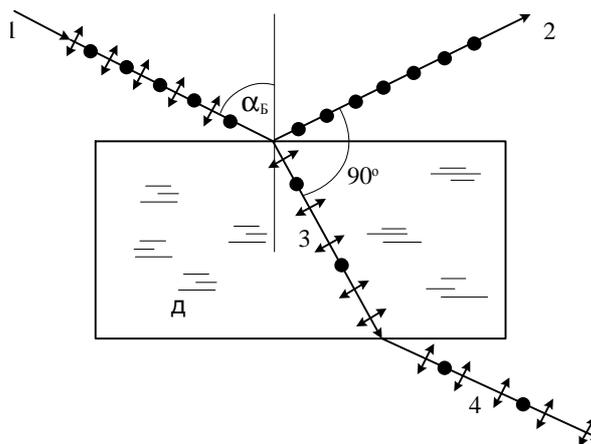


Рис. 7.3. Поляризация при отражении (луч 2) и преломлении (луч 4).

ния, перпендикулярные плоскости рисунка, а стрелками – колебания в плоскости рисунка и перпендикулярные лучам. В падающем естественном луче 1 присутствуют в равной степени обе компоненты волны, колебания в которых совершаются в двух взаимно перпендикулярных направлениях. При условии (7.1) отраженный луч 2 полностью поляризован, т.к. компонента волны, представленная стрелочкой в направлении 2, не дает отражения, а преломленный луч 3 – поляризован частично. Для повышения степени поляризации преломленного луча его заставляют пройти через стопку диэлектриков, ориентированных под углом Брюстера, в результате чего и отраженный и преломленный лучи будут поляризованы практически полностью.

### Двойное лучепреломление. Поляризационные призмы и поляриды.

Рассмотрим процесс поляризации света, основанный на явлении двойного лучепреломления. В 1669 г. датский ученый Эразм Бартолин, изучая прохождение света через кристалл исландского шпата ( $\text{CaCO}_3$ ), обнаружил его способность раздваивать проходящий через него пучок света. Это явление и было названо явлением двойного лучепреломления. Подобной способностью обладают и многие другие кристаллические тела, у исландского шпата эта способность выражена наиболее значительно.

Кроме того, было также установлено, что у кристаллов имеются направления, распространяясь вдоль которых свет не испытывает двойного лучепреломления. Эти направления называют оптическими осями кристаллов. Кристаллы, у которых имеется единственное подобное направление, называют одноосными, если у кристалла имеется два подобных направления – то их называют двуосными кристаллами. Далее мы ограничимся рассмотрением особенностей распространения света только в одноосных кристаллах.

Заметим, во избежание недоразумений, что оптическая ось, это не единственная прямая – это множество прямых, параллельных между собой и проходящих через кристалл.

На рис. 7.4 представлены особенности прохождения естественного света через пластинку исландского шпата К, который является одноосным кристаллом. Пластинка вырезана так, что ее боковые поверхности (поверхности, лежащие в плоскости рисунка) параллельны оптической оси  $O - O'$  данного кристалла. Для простоты на рисунке представлено сечение этой пластинки плоскостью, параллельной боковой поверхности. Наклонные линии параллельные оси  $O - O'$  также являются осями кристалла.

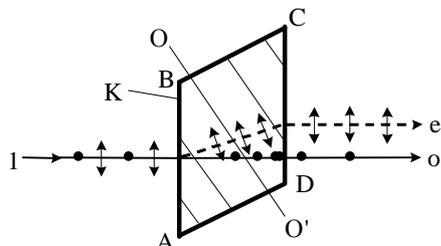


Рис. 7.4. Явление двойного лучепреломления.

Естественный луч света  $I$  падает перпендикулярно передней поверхности кристаллической пластинки  $AB$  и, попадая в кристалл, разбивается на два луча, причем один луч проходит далее в кристалле, не изменяя своего направления – это луч « $o$ », а другой – луч « $e$ », испытывает преломление. Луч « $o$ » называется обыкновенным лучом, а луч « $e$ » – необыкновенным лучом. Первый луч подчиняется закону преломления, а второй луч не подчиняется закону преломления, по этой причине он и называется необыкновенным лучом.

Исследования показали, что оба указанных луча являются плоскополяризованными, причем колебания электрического вектора в волне обыкновенной перпендикулярны плоскости рисунка, а в волне необыкновенной лежат в плоскости рисунка.

Явление двойного лучепреломления можно объяснить тем, что кристаллы, кроме кубических, являются анизотропными средами, в них скорость света зависит от направления в кристалле, что в свою очередь связано с различной поляризуемостью атомов кристалла в разных направлениях.

Вне кристалла лучи (обыкновенный и необыкновенный) ничем не отличаются, кроме направлений колебаний электрического вектора.

Таким образом, для получения плоскополяризованного света при использовании явления двойного лучепреломления, необходимо каким либо образом из потока лучей, прошедших кристалл, исключить либо луч обыкновенный, либо необыкновенный. Это можно сделать несколькими способами. Отметим два из них. Первый основан на различном поглощении кристаллом луча обыкновенного и необыкновенного. Так кристаллы турмалина практически полностью поглощают обыкновенные лучи, и на выходе из кристалла остаются лишь необыкновенные лучи. Из кристаллов турмалина изготавливают по особой технологии тонкие пленки, в которых крохотные кристаллы турмалина, параллельно ориентированные друг другу, располагаются в твердой связующей среде. Такие устройства называются поляроидами.

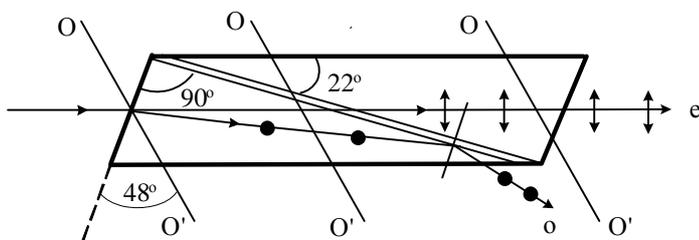


Рис . 7.5. Призма Николя .

Более совершенными и стабильными являются так называемые поляризационные призмы. В них один из лучей устраняется с помощью явления полного

внутреннего отражения. В 1828 г. шотландский физик Уильям Николь предложил поляризационный прибор, основанный на явлении двойного лучепреломления. На рис. 7.5 представлена оптическая схема данного устройства.

Призма Николя состоит из двух трехгранных призм, изготовленных из исландского шпата, склеенных между собой прозрачным веществом – канадским бальзамом, на рисунке слой канадского бальзама заключен между двумя тонкими линиями. Оптическая ось  $O - O'$  кристалла исландского шпата образует с передней гранью угол  $48^\circ$ . Показатели преломления бальзама  $n$  и призм для обыкновенного  $n_o$  и необыкновенного  $n_e$  лучей соответственно равны:  $n = 1,549$ ;  $n_o = 1,659$ ;  $n_e = 1,55$ . При выбранных углах между гранями, они указаны на рисунке, обыкновенный луч на границе «кристалл – бальзам», испытывает полное внутреннее отражение и отклоняется к нижней грани призмы и выходит из потока лучей, выходящих из правой призмы. Ход необыкновенного луча через слой бальзама показан приближенно. Таким образом, вышедший из устройства свет, является полностью поляризованным.

**Поляризаторы и анализаторы. Закон Малюса.** Важнейшими элементами поляризационных приборов являются поляризаторы и анализаторы света. Принцип действия многих поляризационных приборов основан на законе Малюса. Рис. 7.6 иллюстрирует сущность этого закона. Пусть на устройство, называемое поляризатором  $\Pi$ , падает естественный свет интенсивностью  $I_{ест}$ . Поляризатор пропускает через кристалл лучи, для которых колебания светового вектора совершаются в плоскости главного сечения.

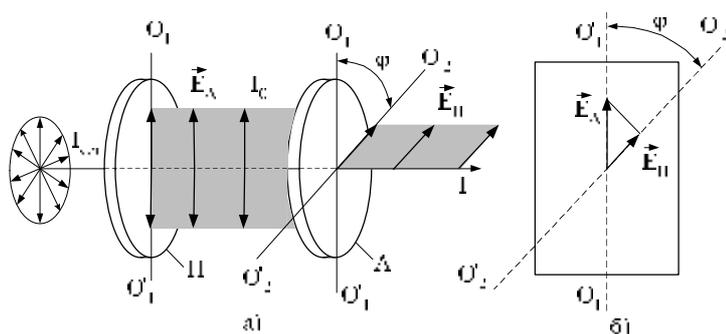


Рис. 7.6. К выводу закона Малюса.

$a$  – оптические оси поляризатора  $\Pi (O_1 O_1')$  и анализатора  $\Delta (O_2 O_2')$  образуют угол  $\varphi$ ;  $b$  – через главный анализатор при этом проходит линия, составляющая для вектора  $\vec{E}_A$  – вектор  $\vec{E}_{II}$  параллельный оси анализатора  $O_2 O_2'$ .

Плоскостью главного сечения называют плоскость, проходящую через направление падающего луча и оптическую ось, пересекаемую этим лучом. В результате чего через поляризатор  $\Pi$  проходят лучи, направление колебаний которых определяются вектором  $\vec{E}_A$ . После поляризатора устанавливается устройство, называемое анализатором, которое позволяет определить угол между

плоскостями главных сечений поляризатора и анализатора. Из рисунка 7.6 (б) видно, что амплитуда колебаний светового вектора  $E_{oA}$  после прохождения поляризатора равна  $E_{oП} = E_{oA} \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между плоскостями колебаний поляризатора и анализатора. Тогда с учетом связи между интенсивностью света и амплитудой световой волны получаем уравнение:

$$I = I_o \cos^2 j, \quad (7.2)$$

где  $I_o$  – интенсивность падающего на анализатор света;  $I$  – интенсивность света, прошедшего через анализатор. Уравнение (7.2) называют законом Малюса. Закон Малюса лежит в основе расчета интенсивности света, прошедшего через поляризатор и анализатор в различных поляризационных приборах.

Если учесть потери света, связанные с отражением и поглощением света в поляризаторе и анализаторе, то закон Малюса примет вид:

$$Ik = I_o \cos^2 j, \quad (7.3)$$

где  $k$  – коэффициент прозрачности поляризатора или анализатора<sup>8</sup>. Если анализатор и поляризатор имеют одинаковый коэффициент прозрачности, то  $Ik = \frac{1}{2} I_o$ . В последнем случае учтено, что интенсивность света, прошедшего через поляризатор, равна половине интенсивности естественного света. По этому поводу смотри текст на странице 94.

**Оптическая активность. Вращение плоскости поляризации.** Многие вещества (кристаллы и растворы) при прохождении через них плоскополяризованного света поворачивают плоскость колебаний светового вектора на некоторый угол. Такие вещества называются оптически активными веществами. К примеру, плоскость колебаний электрического вектора вращают такие вещества, как раствор сахара, эфирные масла, гормоны, белки и т. п.

Различают естественную оптическую активность, которая проявляется в веществе без внешнего физического воздействия, и искусственную оптическую активность, которая проявляется вследствие внешнего физического воздействия на вещество – магнитного поля.

Вращение плоскости колебаний вектора  $\vec{E}$  можно объяснить на основе гипотезы О. Френеля. Согласно гипотезе Френеля скорость распространения световых волн поляризованных по кругу вправо и влево в оптически активных

<sup>8</sup> Коэффициент прозрачности  $k$  определяет долю интенсивности прошедшего через данное устройство света к интенсивности света, падающего на это устройство. Коэффициент прозрачности  $k$  и коэффициент отражения света  $\rho$  связаны очевидным соотношением  $k + \rho = 1$ .

средах различна. В свою очередь плоскополяризованный свет можно разложить на две волны, одна из которых поляризована по кругу влево, а другая поляризована по кругу вправо, если смотреть навстречу луча света. Различие скоростей этих волн в среде и приводит к повороту результирующего вектора при прохождении плоскополяризованного света в данной среде.

Естественная оптическая активность была открыта в 1811 г. Д. Араго на пластинах кварца, вырезанных перпендикулярно оптической оси.

Как показали исследования Ж. Био, угол поворота плоскости колебаний  $\varphi$  электрического вектора пропорционален длине пути  $l$ , пройденному светом в кристалле:

$$j \propto l, \quad (7.4)$$

где  $\alpha$  – удельное вращение, определяющее угол поворота плоскости колебаний на единицу пути света в кристалле и зависящее от длины волны света, температуры и химической природы вещества. Оптическая активность химически чистых жидкостей описывается также уравнением (7.4), только удельную активность жидкостей принято обозначать через  $[\alpha]$ .

На основе опытов, проведенных Ж. Био с растворами в 1831 г., было установлено, что угол поворота плоскости колебаний  $\varphi$  при прохождении плоскополяризованного света через раствор, определяется выражением:

$$j \propto [\alpha]lC, \quad (7.5)$$

где  $C$  – концентрация оптически активного вещества в оптически неактивном растворителе;  $[\alpha]$  – удельная активность раствора, определяющая угол поворота плоскости колебаний на единицу пути света в растворе с концентрацией в 1%.

В 1846 г. М. Фарадей обнаружил вращение плоскости колебаний в оптически неактивных средах, возникающее под действием сильного магнитного поля. Данный эффект наблюдается, если плоскополяризованный свет распространяется вдоль магнитного поля. Опыты Фарадея, а затем более точные опыты М. Верде показали, что угол поворота плоскости колебаний  $\varphi$  пропорционален длине пути  $l$  света в веществе и индукции магнитного поля  $B$  в веществе:

$$j = VIB, \quad (7.6)$$

где  $V$  – постоянная Верде, зависящая от природы вещества, его физического состояния и длины волны. Отметим в заключение этого вопроса, что опыты Фарадея сыграли весьма существенную роль в истории физики. Это было первое явление, в котором обнаружилась связь между оптическими и электромагнитными процессами.

## Контрольные вопросы по теме «Поляризация световых волн»

1. Какой свет называется естественным?
2. Какой свет называется плоскополяризованным?
3. Почему дневной свет, свет, излучаемый лампой накаливания и другими нелазерными источниками, является неполяризованным?
4. Объясните образование плоскополяризованного света при отражении от диэлектриков.
5. Объясните механизм образования плоскополяризованного света при двойном лучепреломлении.
6. Объясните принцип действия призмы Николя для получения плоскополяризованного света.
7. Сформулируйте и поясните физический смысл закона Малюса.
8. Что понимают под оптической активностью вещества?
9. От чего зависит угол поворота плоскости поляризации при прохождении плоскополяризованного света через кристаллы; через жидкие растворы?

## 5. Дисперсия и поглощения света

**Общие сведения.** Дисперсией света называется зависимость абсолютного показателя преломления вещества  $n$  от длины волны  $\lambda$  (или частоты  $\omega$ ):

$$n \neq f(\lambda) \quad \text{или} \quad n \neq f(\omega), \quad (8.1)$$

где  $\omega$  – циклическая частота, причем  $\omega = 2\pi\nu$ .

Для разных сред зависимость  $n$  от  $\lambda$  различна. Для большинства прозрачных сред (стекла, кварца и т. п.) в видимой области спектра с увеличением длины волны показатель преломления уменьшается, а следовательно, с увеличением частоты показатель преломления увеличивается. Первые экспериментальные исследования дисперсии света были выполнены И. Ньютоном еще в 1672 г. с помощью призмы. Схема подобного опыта представлена на рис. 8.1.

На призму  $P$  падает узкий пучок света, выделяемой щелью, параллельной преломляющему ребру призмы. На экране  $\mathcal{E}$  наблюдается спектр видимого света. Из рисунка видно, что больше всего преломляются в призме фиолетовые лучи, имеющие наименьшую длину волны в видимой части спектра, а красные лучи отклоняются меньше всего.

Измеряя показатель преломления для разных длин волн, можно исследовать вид функции  $n(\lambda)$ . Первый простой, и наглядный метод исследования этой зависимости был предложен еще Ньютоном. Он основан на использовании двух призм, преломляющие ребра которых взаимно перпендикулярны.

На рис. 8.2 представлена типичная зависимость  $n(\lambda)$ . Из этого рисунка видно, что с ростом длины волны света показатель преломления вещества уменьшается. Мерой дисперсии вещества является производная  $\frac{dn}{d\lambda}$ . Как видно из рис. 8.2, эта производная меньше нуля. Подобный вид дисперсии получил название нормальной дисперсии.

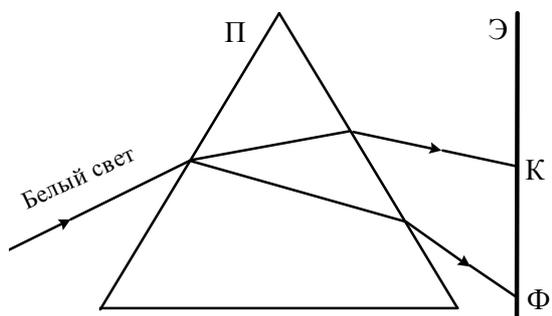


Рис. 8.1. Метод исследования дисперсии по Ньютону .

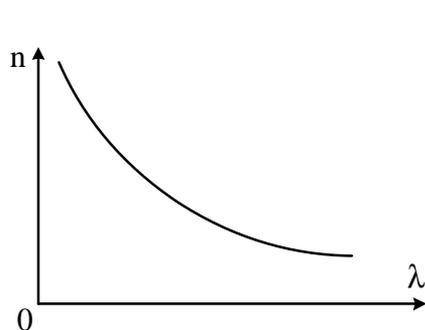


Рис. 8.2. Нормальная дисперсия .

Дальнейшие исследования дисперсии различных веществ, выполненные Фр. Леру (1862), и Августом Кундтом (1871) позволили расширить представления о дисперсии вещества. Так, Леру впервые обнаружил, что пары йода имеют показатель преломления для синих лучей меньше, чем для красных, что отличается от закономерности, приведенной на рис. 8.2. Леру назвал это явление аномальной дисперсией. Для аномальной дисперсии производная  $\frac{dn}{d\lambda}$  больше нуля.

Систематические исследования дисперсии, выполненные Кундтом по методу скрещенных призм, позволили сделать ему важный вывод. Явление аномальной дисперсии тесно связано с поглощением вещества. Все тела, дающие аномальную дисперсию в некоторой части спектра, сильно поглощают свет в этой области. Аномальный ход дисперсии имеет место внутри полосы поглощения. Вдали от полосы поглощения зависимость  $n(\lambda)$  имеет обычный (нормальный) вид.

**Элементарная электронная теория дисперсии.** Согласно электромагнитной теории света скорость света в вакууме для различных длин волн (частот) одинакова. Только в веществе имеет место зависимость скорости электромагнитных волн, в том числе и световых волн, от длины волны (частоты). Следовательно, дисперсия может быть объяснена на основе атомистических представлений о строении вещества. По теории Максвелла скорость электромагнитных волн в веществе определяется выражением (3.6), см. раздел «Волны»:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{e}},$$

где  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$  – соответственно электрическая и магнитная постоянные, относительная диэлектрическая и относительная магнитная проницаемости среды,  $c$  – скорость света в вакууме,  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . Для оптически прозрачных сред  $\mu = 1$ , и тогда  $v = c/\sqrt{e}$ . Следовательно, абсолютный показатель преломления среды определяется ее относительной диэлектрической проницаемостью:

$$n = \sqrt{e}. \quad (8.2)$$

Таким образом, дисперсию света в веществе можно рассматривать как следствие зависимости  $\epsilon$  от частоты  $\omega$ <sup>9</sup>. Дисперсия света в веществе возникает в результате вынужденных колебаний зараженных частиц – электронов и ионов – под действием переменного поля световой волны.

Первая теория, учитывающая атомно-молекулярные представления о структуре вещества и наличие электронов в атомах и молекулах, была создана нидерландским физиком Х.А. Лорентцем. Она носит название классической электронной теории дисперсии. Согласно этой теории под действием поля световой волны возникает ускоренное движение элементарных электрических зарядов в среде. В свою очередь, смещение элементарных зарядов (электронов или ионов) приводит к поляризации вещества. Из формулы (8.2) и раздела «Электростатика» следует:

$$e = n^2 - 1 = \frac{P}{e_0 E}. \quad (8.3)$$

В этой формуле мы учли, что диэлектрическая восприимчивость вещества  $\chi$  связана с напряженностью электрического поля световой волны  $E$  соотношением:  $P = \epsilon_0 \chi E$ , а модуль вектора поляризации  $\vec{P}$  по определению равен:  $\vec{P} = N e r$ , где  $r$  – смещение заряда  $e$  под действием поля  $E$ ;  $N$  – концентрация валентных электронов.

С учетом сказанного относительная диэлектрическая проницаемость может быть представлена формулой

$$e = n^2 - 1 = \frac{N e r}{e_0 E}. \quad (8.4)$$

Таким образом, для объяснения дисперсии света, как следует из формул (8.2, 8.4), необходимо показать зависимость смещения  $r$  от частоты падающей

<sup>9</sup> В теории дисперсии вместо зависимости  $n(\lambda)$  удобнее рассматривать зависимость  $n(\omega)$ .

на вещество световой волны. В классической теории для определения  $r$  используют второй закон Ньютона для движения заряженных частиц.

Будем полагать для простоты рассуждений, что в атоме имеется один валентный электрон, который и подвергается действию электрического поля световой волны. На данный электрон действуют следующие силы:

1) квазиупругая сила  $F_{уп.}$ , обусловленная связью валентного электрона с остальной частью атома:  $F_{уп.} = -k r$ , где  $k$  – коэффициент квазиупругой связи;

2) тормозящая сила  $F_m$ , обусловленная потерями энергии на излучение и поглощение:  $F_m = -\beta \dot{r}$ , где  $\beta$  – коэффициент сопротивления;

3) вынуждающая сила  $F_e$ , обусловленная действием электрического поля световой волны:  $F_e = e E_0 \cos(\omega t)$ , где  $e$  – заряд электрона,  $E_0$  – амплитуда напряженности электрического поля световой волны,  $\omega$  – циклическая частота колебаний световой волны.

Второй закон Ньютона для движения валентного электрона в данном случае примет вид:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} + \beta \dot{r} - k r = e E_0 \cos(\omega t) \quad (8.5)$$

Решение уравнения (8.5) несколько громоздко. Для упрощения дальнейшего решения пренебрежем поглощением света в среде, положив, что  $\beta = 0$ , тогда уравнение (8.5) примет вид:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \omega_0^2 r = \frac{e E_0}{m} \cos(\omega t) \quad (8.6)$$

где  $\omega_0^2 = k/m$  – собственная частота колебаний валентного электрона. Решение уравнения (8.6) имеет вид:

$$r = \frac{e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \quad (8.7)$$

С учетом (8.4) и (8.7) получаем окончательно выражение для показателя преломления вещества в виде:

$$n^2 = 1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (8.8)$$

Из формулы (8.8) следует:

- 1) при увеличении частоты световой волны от 0 до  $\omega < \omega_0$  показатель преломления  $n > 1$  и возрастает (нормальная дисперсия);
- 2) при  $\omega = \omega_0$  показатель преломления  $n = \pm \infty$ ;
- 3) в области частот  $\omega_0 \leq \omega \leq \infty$   $n < 1$  и возрастает от  $-\infty$  до 1 (нормальная дисперсия).

Обращение  $n$  в бесконечность во втором случае физического смысла не имеет и связано с тем обстоятельством, что мы пренебрегли потерями энергии на излучение и поглощение энергии в веществе. При учете этого обстоятельства для показателя преломления

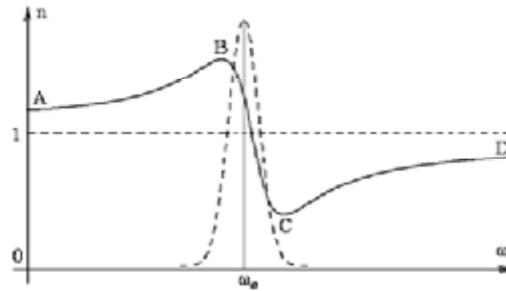


Рис. 8.3. Теоретическая зависимость показателя преломления среды от частоты, кривая ABCD. Штриховой линией представлена зависимость коэффициента поглощения среды от частоты в области аномальной дисперсии.

получается выражение, график которого представлен на рис. 8.3. Области АВ и CD соответствуют нормальной дисперсии, область ВС, соответствующая условию 2, см. выше, называется областью аномальной дисперсии. В области аномальной дисперсии имеет место резкое увеличение поглощения энергии световой волны. Зависимость коэффициента поглощения от частоты падающего света представлена на рис. 8.3 штриховой линией. Максимум этой кривой соответствует частоте собственных колебаний  $\omega_0$  валентного электрона.

Если в веществе содержится несколько валентных электронов, то выражение  $n \neq \omega$  приобретает более сложный вид, см. пример 10.2 к теме «Взаимодействие электромагнитных волн с веществом». Заметим также, что формула (8.8) справедлива для световых волн, частота которых существенно отличается от частоты собственных колебаний валентных электронов  $\omega_{oi}$ .

При прохождении рентгеновских волн через вещество можно пренебречь частотой собственных колебаний электронов в сравнении с частотой рентгеновских волн (для видимой области света частота рентгеновских волн превышает частоту колебаний валентных электронов примерно в  $10^3$  раз).

Если в веществе имеются свободные электроны, то для них  $\omega_{oi} = 0$ , т.к. они не связаны упруго с ионными остатками атомов.

**Фазовая и групповая скорости электромагнитных волн.** При распространении световых волн в диспергирующей среде вводят понятие фазовой и групповой скорости.

Фазовой скоростью  $v$  света называют скорость распространения точки световой волны, в которой фаза волны остается неизменной. Фазовая скорость входит в уравнение бегущей волны:

$$E = E_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right], \quad (8.9)$$

где  $x$  – расстояние от начальной точки, где возбуждается волна,  $\varphi_0$  – начальная фаза волны.

Фазовая скорость определяется выражением:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{v}{k}, \quad (8.10)$$

где  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ .

Фазовая скорость, как видно из ее определения, характеризует скорость распространения идеальной монохроматической волны. Реальные световые волны представляют собой конечные во времени импульсы световых волн и по существу состоят из совокупности большого числа монохроматических волн с близкими частотами. Такую совокупность волн называют *группой волн*. Группу волн характеризуют групповой скоростью. Групповая скорость – это скорость распространения точки группы волн, в которой амплитуда группы волн остается постоянной. Поскольку энергия волны пропорциональна квадрату амплитуды световой волны, то групповую скорость можно определить как скорость распространения энергии световой волны, которая, согласно постулатам теории относительности, не может превышать скорость света в вакууме.

Групповая скорость по определению выражается формулой

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (8.11)$$

Английский ученый Дж. Рэлей установил соотношение между групповой и фазовой скоростями света. Оно имеет вид:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (8.12)$$

В области нормальной дисперсии, где  $dn/d\lambda < 0$ , групповая скорость света меньше фазовой, этому случаю соответствует убывание коэффициента преломления  $n$  с возрастанием длины волны. В области аномальной дисперсии  $dn/d\lambda > 0$  и формально групповая скорость оказывается больше фазовой, но в этой области вследствие сильной дисперсии понятие групповой скорости не имеет смысла. Для воздуха дисперсия настолько мала, что групповая и фазовая скорости практически совпадают, в вакууме же дисперсия вовсе отсутствует, и данные скорости совпадают точно.

**Поглощение света.** При прохождении света через любое вещество (твердое, жидкое, газообразное) происходит уменьшение его интенсивности. Данный процесс носит название поглощения света. Поглощение света в веществе

связано с рядом физических факторов:

- 1) переходом энергии световой волны во внутреннюю энергию вещества, связанную с движением атомов или молекул;
- 2) ионизацией атомов или молекул (фотоэффект);
- 3) возникновением вторичного излучения (фотолюминесценции, имеющей иной спектральный состав);
- 4) рассеянием света на мелких оптических неоднородностях среды, приводящим к выводу этого излучения от направления первоначального распространения световой волны.

Первые два фактора обуславливают истинное поглощение света, т.к. приводят к превращению электромагнитной энергии во внутреннюю энергию вещества.

Если на входе в вещество интенсивность световой волны будет  $I_0$ , то после прохождения слоя вещества толщиной  $d$  интенсивность волны уменьшается и на выходе из вещества она будет равна  $I$ . Как показывает эксперимент, для оптически однородной среды эти величины связаны соотношением:

$$I = I_0 e^{-kd}, \quad (8.13)$$

где  $e$  – основание натуральных логарифмов;  $k$  – коэффициент поглощения, зависящий от химической природы и состояния вещества и длины волны света  $\lambda$ . Коэффициент поглощения есть величина, обратная толщине вещества, при прохождении которого интенсивность света уменьшается в  $e = 2,718$  раз.

Выражение (8.12) определяет зависимость, называемую законом Бугера. Физический смысл закона Бугера состоит в том, что коэффициент поглощения  $k$  не зависит от интенсивности света.

Зависимость показателя поглощения от длины волны называют спектром поглощения. Разреженные газы имеют линейчатый спектр поглощения, жидкости и твердые тела – сплошной спектр поглощения.

В разбавленных растворах вещества в практически непоглощающем растворителе коэффициент поглощения  $k = b \cdot C$  и закон Бугера (в этом случае его называют законом Бугера–Ламберта–Бера) принимает вид:

$$I = I_0 e^{-bCd}, \quad (8.14)$$

где  $C$  – концентрация раствора;  $b$  – коэффициент, не зависящий от концентрации и характерный для молекул поглощающего вещества.

### **Контрольные вопросы по теме «Дисперсия и поглощение световых волн»**

1. Что называется дисперсией световых волн?
2. В чем заключается разница между нормальной и аномальной дисперсией световых волн?
3. Волны, какого участка видимого света, синего или красного, испытывают большее отклонение при прохождении через призму?
4. В чем заключается физическая разница в дисперсии световых волн при прохождении их через призму и дифракционную решетку?
5. Изобразите примерный график зависимости показателя преломления от частоты для нормальной дисперсии.
6. Изобразите схему наблюдения дисперсии световых волн по Ньютону.
7. Запишите дифференциальное уравнение, описывающее дисперсию световых волн в веществе на основе классической электронной теории.
8. Поясните физическую сущность элементарной электронной теории дисперсии световых волн.
9. Изобразите график зависимости показателя преломления от частоты при наличии в атомах вещества одного валентного электрона. Как изменится эта зависимость при наличии нескольких валентных электронов?
10. Объясните, почему в области аномальной дисперсии имеет место максимальное поглощение энергии световой волны?
11. Объясните, почему при анализе дисперсии рентгеновских волн в веществе можно пренебречь частотой собственных колебаний валентных электронов?
12. Каковы физические причины уменьшения интенсивности световых волн при прохождении их через вещество?
13. Почему раствор с одной и той же концентрацией растворенного вещества по-разному поглощает световые волны разных частот?
14. Дайте определения фазовой и групповой скоростей световых волн. Каково соотношение между фазовой и групповой скоростями световых волн в вакууме?
15. Сформулируйте закон Бугера–Ламберта–Бера.
16. Дайте физическое объяснение уменьшения интенсивности световой волны, проходящей через раствор вещества, при увеличении концентрации.
17. Какие спектры поглощения имеют разреженные газы, жидкости и твердые тела?

18. На величину какой скорости, фазовой или групповой, накладывает ограничение специальная теория относительности?

## Методические указания и примеры решения задач

### 1. Гармонические колебания

#### Пример 1.1

Материальная точка массой  $m=100$  г совершает гармонические колебания по закону  $x = 10 \cdot \sin(\pi t + \frac{\pi}{6})$  см. Определить амплитуду скорости  $u_m$ , максимальное значение силы  $F_m$ , действующей на точку, и ее полную энергию  $W$ .

Дано:  $m=100$  г=0,1 кг,  $x = 10 \cdot \sin(\pi t + \frac{\pi}{6})$ , см.

Найти:  $u_m$  -?  $F_m$  -?  $W$  -?

Решение

Уравнение гармонических колебаний в данной задаче имеет вид  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + a)$ . Сравнивая это уравнение с законом  $x = 10 \cdot \sin(\pi t + \frac{\pi}{6})$ , находим, что амплитуда колебаний равна  $A=10$  см=0,1 м; циклическая частота  $\omega_0 = \pi$  с<sup>-1</sup>; начальная фаза  $a = \frac{\pi}{6}$ .

Скорость колеблющейся точки есть производная от смещения по времени:

$$u(t) = \frac{dx}{dt} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + a),$$

где через  $u_m$  обозначена максимальная скорость,  $u_m = A \omega_0$ . (1.1.1)

Максимальное значение силы будет равно произведению массы на максимальное ускорение  $F_m = m a_m$ .

Ускорение колеблющейся точки – это производная от скорости по времени:

$$a(t) = \frac{du}{dt} = -A \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + a),$$

где  $a_m = \omega_0^2 A$  - максимальное ускорение.

Тогда выражение для максимальной силы будет иметь вид:

$$F_{\text{max}} = mA \omega_0^2. \quad (1.1.2)$$

Полная энергия  $W$  колебательного движения определится согласно формуле (1.18):

$$W = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (1.1.3)$$

Подставив числовые значения в формулы (1.1.1) - (1.1.3), рассчитаем результат.

$$u_m = 0,10,314 \quad \text{м/с};$$

$$F_m = 9,86 \cdot 10^{-2} \text{ Н};$$

$$W = 4,9 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Ответ:  $u_m = 0,314$  м/с,  $F_m = 9,86 \cdot 10^{-2}$  Н,  $W = 4,9 \cdot 10^{-3}$  Дж.

### Пример 1.2

Тело совершает гармонические колебания с периодом  $T=1,5$  с, а максимальное ускорение тела составляет  $a_m = 5$  см/с<sup>2</sup>. Определить скорость колеблющегося тела в тот момент, когда кинетическая энергия тела  $W_k$  в 2 раза меньше его потенциальной энергии  $W_n$ .

Дано:  $T=1,5$  с,  $a_m = 5$  см/с<sup>2</sup> = 0,05 м/с<sup>2</sup>,  $W_k = 2 W_n$ .

Найти:  $u$  -?

#### Решение

По закону сохранения энергии полная энергия тела, совершающего гармонические колебания, остается постоянной. Величина полной энергии является суммой кинетической и потенциальной энергии и равна либо максимальной кинетической энергии  $W_{k, \text{max}}$ , либо максимальной потенциальной энергии  $W_{n, \text{max}}$ :

Так как по условию  $W_n = 2W_k$ , то полная энергия равна

$$W_{\text{пол}} = W_{k, \text{max}} + W_{n, \text{max}} = 3W_{k, \text{max}}. \quad (1.2.1)$$

Подставляя формулы  $W_k = \frac{mu^2}{2}$ ,  $W_{k, \text{max}} = \frac{mu_m^2}{2}$  в (1.2.1), получим:

$$W_{\text{пол}} = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu_m^2}{2} = 3 \frac{mu_m^2}{2}. \quad \text{Откуда } u^2 = \frac{2}{3} u_m^2.$$

Следовательно, величина скорости в тот момент, когда кинетическая энергия тела  $W_k$  в 2 раза меньше его потенциальной энергии  $W_n$ , определится по формуле

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}} w_0. \quad (1.2.2)$$

Значение максимальной скорости равно (см. пример 1.1)  $u = A \omega_0$ , а максимального ускорения -  $a_m = \omega_0^2 A$ . Откуда  $u = \frac{a_m}{\omega_0}$ . (1.2.3)

Подставив формулу (1.2.3) в (1.2.2), и учитывая, что  $\omega_0 = \frac{2p}{T}$ , получим:

$$u = \frac{11}{\sqrt{3323}} \frac{a_m T}{p \sqrt{3}}. \quad (1.2.4)$$

Подставим числовые значения и рассчитаем результат:

$$u = \frac{0,0515}{2 \sqrt{3}} \cdot 6,9 \cdot 10^{-3} \text{ м/с.}$$

Ответ:  $u = 6,9 \cdot 10^{-3} \text{ м/с.}$

### Пример 1.3

Тонкий однородный стержень длины  $l = 1 \text{ м}$  совершает гармонические колебания вокруг горизонтальной оси, находящейся на расстоянии  $d = 25 \text{ см}$  от его середины. Определить период его колебаний.

Дано:  $l = 1 \text{ м}$ ,  $d = 25 \text{ см} = 0,25 \text{ м}$ .

Найти:  $T$  –?

*Решение*

Период колебаний физического маятника, каким является стержень, определяется выражением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}, \quad (1.3.1)$$

где  $I$  – момент инерции тела относительно оси вращения;  $d$  – расстояние между осью вращения и центром масс;  $m$  – масса тела.

Момент инерции стержня  $I$  относительно оси вращения можно определить по теореме Штейнера:  $I = I_c + md^2$ , (1.3.2)

где  $I_c$  – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс;

$d$  – расстояние между осью вращения и осью проходящей через центр масс.

Момент инерции стержня длиной  $l$  относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной стержню, определяется формулой:

$$I_c = \frac{ml^2}{12}. \quad (1.3.3)$$

Подставив формулу (1.3.3) в (1.3.2), получим формулу момента инерции стержня относительно оси вращения:  $I_{\text{стержня}} = \frac{ml^2}{12} + md^2$  (1.3.4). Это выра-

жение подставим в (1.3.1):  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$   $\sqrt{\frac{l^2/12 + d^2}{12}}$ .

При подстановке числовых значений примем ускорение свободного падения равным  $g=10 \text{ м/с}^2$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1/12 + 0,25^2}{0,25 \cdot 10}} = 0,208 \text{ с.}$$

Ответ:  $T = 0,208 \text{ с.}$

### Пример 1.4

Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой равной  $\nu = 0,5 \text{ Гц}$ . Амплитуда колебания  $A = 5 \text{ см}$ . Определить скорость точки  $u$  в тот момент, когда смещение равно  $x = 2,5 \text{ см}$ .

Дано:  $A = 5 \text{ см}$ ,  $\nu = 0,5 \text{ Гц}$ ,  $x = 2,5 \text{ см}$ .

Найти:  $u$  -?

Решение

Выберем в качестве закона изменения смещения  $x(t)$  точки относительно положения равновесия функцию косинуса:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.4.1)$$

Скорость движения точки  $u$  есть производная  $x(t)$  по времени:

$$u(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.4.2)$$

Для определения скорости в некоторый момент времени необходимо знать значение фазы колебания  $(\omega t + \varphi)$  (ее синус) в этот момент. Фазу колебания (ее косинус) определим из уравнения (1.4.1):

$$\cos(\omega t + \varphi) = \frac{x}{A}. \quad (1.4.3)$$

Воспользуемся тригонометрической формулой

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \varphi)}.$$

Подставляя ее в формулу (1.4.2), получим

$$u(t) = -A\omega \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \quad (1.4.4)$$

Подставив (1.4.4) в (1.4.2), и учитывая, что  $\omega = 2\pi\nu$ , найдем значение модуля скорости точки:

$$u = \frac{1}{\omega_0} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\omega_0} \frac{v}{A} \sqrt{\frac{x^2}{A^2}} = \frac{1}{\omega_0} \frac{v}{A} \sqrt{\frac{x^2}{A^2}} \quad (1.4.5)$$

При подстановке числовых значений все величины переведем в систему СИ.

$$u = \frac{1}{\omega_0} \frac{v}{A} \sqrt{\frac{x^2}{A^2}} = 13,4 \cdot 10^{-2} \text{ м/с.}$$

Нетрудно показать, что если в качестве закона изменения смещения  $x(t)$  точки относительно положения равновесия выбрали бы функцию синус, а не косинус, то результат был бы тот же.

Ответ:  $u = 13,4 \cdot 10^{-2}$  м/с.

### Пример 1.5

Уравнение изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре имеет вид:  $U = 20 \cos(400pt)$ , В. Емкость конденсатора 50 мкФ. Найти индуктивность контура и закон изменения силы тока в цепи  $I(t)$ .

Дано:  $C = 50 \text{ мкФ} = 50 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$ ,  $U = 20 \cos(400pt)$ , В.

Найти:  $L$  –?  $I(t)$  –?

#### Решение

Уравнение изменения разности потенциалов в общем виде будет выглядеть  $U = U_m \cos \omega_0 t$ . Сравнивая это уравнение с законом  $U = 20 \cdot \cos 400pt$ , находим, что амплитуда напряжения на обкладках конденсатора  $U_m = 20$  В; циклическая частота  $\omega_0 = 400p \text{ с}^{-1}$ .

По определению циклическая частота электромагнитных колебаний  $\omega_0$  равна  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Тогда индуктивность контура  $L$  определится  $L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$ .

$$\text{Подставим числовые значения: } L = \frac{1}{(400p)^2 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 0,0127 \text{ Гн.}$$

Для того чтобы найти закон изменения силы тока в цепи контура, необходимо найти закон изменения заряда на обкладках конденсатора в колебательном контуре  $q(t)$  и взять от него производную по времени. Заряд на обкладках конденсатора связан с напряжением  $q = CU$ . Поэтому закон изменения заряда будет иметь вид:  $q(t) = 20 \cos 400pt$  Кл.

Взяв производную по времени от  $q(t)$ , получим:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = 400p \cdot 20 \sin 400pt = 4001,256 \cos(400pt) \quad \frac{p}{2} \text{ А.}$$

$$\text{Ответ: } L = 0,0127 \text{ Гн, } I(t) = 2,56 \cos(400pt) \quad p \quad \frac{p}{2} \text{ А.}$$

### Пример 1.6

Максимальное значение силы тока в колебательном контуре, состоящего из катушки индуктивности и конденсатора, равно  $I_m = 0,1$  А, максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора  $U_m = 200$  В. Определить циклическую частоту колебаний, если энергия контура равна  $W = 0,2$  мДж.

Дано:  $I_m = 0,1$  А,  $U_m = 200$  В,  $W = 0,2$  мДж  $= 2 \cdot 10^{-4}$  Дж.

Найти:  $\omega_0$  —?

Решение

В идеальном электрическом контуре максимальная энергия электрического поля  $W_{\text{э max}}$  заряженного конденсатора равно максимальной энергии магнитного поля  $W_{\text{м max}}$  катушки:

$$W_{\text{э max}} = W_{\text{м max}}, \text{ или } \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}. \quad (1.6.1)$$

Из уравнения (1.6.1) следует равенство:  $\sqrt{CU_m^2} = \sqrt{LI_m^2}$ . (1.6.2)

Энергию контура можно определить следующим образом:

$$W = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \cdot \frac{1}{\omega_0^2}. \quad (1.6.3)$$

Циклическая частота электромагнитных колебаний определяется  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Подставляя ее значение в формулу (1.6.3), получим

$$W = \frac{LI_m^2}{2} \cdot \omega_0^2.$$

Откуда найдем окончательное выражение для циклической частоты:

$$\omega_0 = \frac{IU_m}{2W}. \quad (1.6.4)$$

Подставим числовые значения и рассчитаем результат:

$$\omega_0 = \frac{0,1 \cdot 200}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ:  $\omega_0 = 5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ .

### Пример 1.7

Максимальное значение силы тока в колебательном контуре составляет  $I_m = 1,57$  мА. Частота колебаний равна  $\nu = 250$  Гц. Определить заряд на обкладках конденсатора колебательного контура в тот момент, когда энергия

электрического поля конденсатора в 3 раза меньше энергии магнитного поля катушки  $W_{\text{Э}} = 3 W_{\text{М}}$ .

Дано:  $I_m = 1,57 \text{ мА} = 1,57 \cdot 10^{-3} \text{ А}$ ,  $\nu = 250 \text{ Гц}$ ,  $W_{\text{М}} = 3 W_{\text{Э}}$ .

Найти:  $q$  -?

Решение

В идеальном электрическом контуре из закона сохранения энергии следует, что максимальное значение энергии электрического поля  $W_{\text{Э max}}$  заряженного конденсатора равно максимальному значению энергии магнитного поля  $W_{\text{М max}}$  катушки:  $W_{\text{Э max}} = W_{\text{М max}}$ .

В произвольный же момент времени сумма энергии электрического  $W_{\text{Э}}$  и магнитного полей  $W_{\text{М}}$  является величиной постоянной:  $W_{\text{Э}} + W_{\text{М}} = W_{\text{Э max}} + W_{\text{М max}}$ .

Так как по условию  $W_{\text{М}} = 3 W_{\text{Э}}$ , то полная энергия равна  $W_{\text{Э}} + 3 W_{\text{Э}} = 4 W_{\text{Э}}$  (1.7.1)

Выражая энергию электрического поля через заряд  $W_{\text{Э}} = \frac{q^2}{2C}$ , равенство (1.7.1) запишем в виде:

$$4 \frac{q^2}{2C} = W_{\text{М}}, \text{ или } 4q^2 = W_{\text{М}} C. \quad (1.7.2)$$

Следовательно, величина заряда на обкладках конденсатора в тот момент, когда энергия электрического поля конденсатора в 3 раза меньше энергии магнитного поля катушки, определится

$$q = \frac{q_m}{2}. \quad (1.7.3)$$

Максимальное значение заряда связано с максимальным значением силы тока в цепи контура  $I_{\text{hm}} = I_m$ , или  $q_m = \frac{I_m}{\omega_0}$ . (1.7.4)

Это следует из того, что сила тока есть производная заряда по времени:  $I = \frac{dq}{dt}$ . Так как изменение заряда на обкладках конденсатора происходит по гармоническому закону:  $q(t) = q_m \cos(\omega_0 t)$  (1.7.4). Взяв от него производную по времени, получим:

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t) = I_{\text{hm}} \sin(\omega_0 t), \quad (1.7.5)$$

где  $I_{\text{hm}} = I_m$  и есть амплитуда силы тока.

Подставив формулу (4) в (3), и учитывая, что  $\omega_0 = 2\pi\nu$ , получим:

$$q = \frac{q_m}{2} = \frac{I_{\text{hm}}}{2 \cdot 2\pi\nu}. \quad (1.7.5)$$

Подставим числовые значения и рассчитаем результат:

$$q = \frac{1,5710^{-3}}{4 \cdot 50} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

Ответ:  $q = 0,5 \cdot 10^{-6}$  Кл.

## 2. Сложение колебаний

### Пример 2.1

Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемые уравнениями  $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$  и  $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ , где  $A_1 = 4$  см,  $A_2 = 4$  см. Определить для результирующего колебания амплитуду  $A$ , начальную фазу  $\alpha$ . Записать уравнение результирующего колебания.

Дано:  $A_1 = A_2 = 4$  см,  $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha_1 = \pi/4$ ,  $\alpha_2 = \pi/2$ .

Найти:  $A$  –?  $\alpha$  –?  $x(t)$  –?

Решение

Результатом сложения двух гармонических колебаний одинакового направления, одинаковой частоты является гармоническое колебание той же частоты  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ , амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\alpha$  которого определяются по формулам (1.38) и (1.39) соответственно:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad (2.1.1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (2.1.2)$$

Так как амплитуды колебаний одинаковы  $A_1 = A_2$ , а разность фаз равна  $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$  ( $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ), то формулы (2.1.1) и (2.1.2) преобразуются:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_1^2 + 2A_1^2 \cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} A_1, \quad \text{или} \quad A = \sqrt{2} \cdot 4 = 5,657 \text{ см.} \quad (2.1.3)$$

Подставим числовые значения:

$$A = \sqrt{2} \cdot 4 = 5,657 \text{ см.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{\pi}{2}}{4 \cos \frac{\pi}{4} + 4 \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4}{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0} = \frac{2\sqrt{2} + 4}{2\sqrt{2}} = 2,41;$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(2,41).$$

Полученные данные амплитуды  $A$  и начальной фазы  $\alpha$  подставим в уравнение результирующего колебания:

$$x(t) = 5,657 \cdot \cos(\pi t + \operatorname{arctg}(2,41)), \text{ см.}$$

Ответ:  $A=7,4$  см.  $a = \text{arctg}(2,41)$   $x(t)=7,4 \cdot \cos(pt + \text{arctg}(2,41))$ .

### Пример 2.2

Частица принимает участие одновременно в трех гармонических колебаниях, происходящих вдоль одного направления по законам:

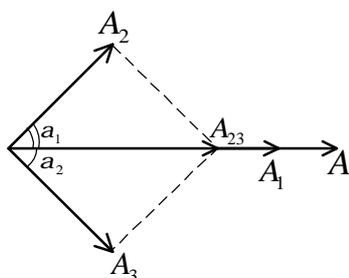
$x_1 = A_1 \cos(\omega t)$ ,  $x_2 = A_2 \cos(\omega t + p/3)$ ,  $x_3 = A_3 \cos(\omega t - p/3)$ , где  $A_1 = 5$  см,  $A_2 = A_3 = 4$  см,  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ . Определить графическим методом амплитуду  $A$  и начальную фазу  $a$  результирующего колебания.

Дано:  $A_1 = 5$  см,  $A_2 = 4$  см,  $A_3 = 4$  см,  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \frac{p}{3}$ ,  $a_3 = -\frac{p}{3}$ .

Найти:  $A$  -?  $a$  -?

#### Решение

Представим все три колебания на векторной диаграмме (рис.). Первое колебание на диаграмме изобразится вектором длиной  $A_1$ , направленным вдоль горизонтальной оси. Второе - вектором, длиной  $A_2$ , повернутым относительно горизонтальной оси против часовой стрелки на угол  $a_2 = \frac{p}{3}$ . Третье колебание



изобразится вектором длиной  $A_3$ , повернутым относительно горизонтальной оси по часовой стрелке на угол  $a_3 = \frac{p}{3}$ .

Амплитуда  $A$  результирующего колебания будет равна длине вектора, являющимся геометрической суммой трех векторов, изображающих три колебания на векторной диаграмме. Из рисунка видно, что удобно

Рис.2.2.1. сначала сложить второй и третий вектора. По теореме косинусов, квадрат длины амплитуды суммарного вектора  $A_{23}$  равен:

$$A_{23}^2 = A_2^2 + A_3^2 - 2A_2 A_3 \cos(\alpha) \quad (2.2.1)$$

Угол между векторами  $A_2$  и  $A_3$  равен  $\alpha = \frac{2p}{3}$  ( $\cos \frac{2p}{3} = -\frac{1}{2}$ ). Так как амплитуды колебаний одинаковы  $A_2 = A_3$ , то из уравнения (2.2.1) следует:

$$A_{23}^2 = 2A_2^2 \left(1 - \cos \frac{2p}{3}\right) \quad (2.2.2)$$

Таким образом получили, что вектор  $A_{23}$ , изображающий сумму второго и третьего колебаний, имеет длину, равную  $A_2$ , и направлен вдоль горизонталь-

ной оси. Тогда амплитуда  $A$  результирующего колебания определится суммой двух векторов  $A_1$  и  $A_2$ , совпадающих по направлению. Следовательно,

$$A = A_1 + A_2 = 5 + 4 = 9 \text{ см.} \quad (2.2.3)$$

Подставим числовые значения:  $A = 5 + 4 = 9$  см.

Так как вектор, изображающий результирующее колебание, направлен вдоль горизонтальной оси, относительно которой отсчитывается фаза колебания, то начальная фаза  $a$  результирующего колебания равна нулю.

*Ответ:*  $A = 9$  см,  $a = 0$ .

### Пример 2.3

Частица принимает участие одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения движения которых имеют вид:  $x = A \cos(\omega t + a)$ ,  $y = B \sin(\omega t + a)$ , где  $A = 4$  см,  $B = 3$  см. Найти уравнение траектории частицы.

*Дано:*  $A = 4$  см,  $B = 3$  см.

*Найти:*  $y(x)$  —?

*Решение*

Результат сложения двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинаковой частоты определяется разностью фаз этих колебаний. Чтобы определить разность фаз колебаний, необходимо уравнения движения  $x(t)$ ,  $y(t)$  свести к одной функции, например синус. Из тригонометрической формулы  $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ , где в данном случае  $\alpha = \omega t + a$ , уравнения движения частицы можно привести к виду:  $x = A \sin(\omega t + a + \frac{\pi}{2})$ ,  $y = B \sin(\omega t + a)$ . Из уравнений видно, что разность фаз двух колебаний равна  $\frac{\pi}{2}$  и, согласно результатам, приведенным в теоретическом разделе, траектория частицы представляет собой эллипс.

Результирующую траекторию найдем с помощью следующих преобразований искомым уравнений:

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t + a), \quad \frac{y}{B} = \sin(\omega t + a).$$

Возведем в квадрат почленно левые и правые части этих уравнений и сложим их:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \cos^2(\omega t + a) + \sin^2(\omega t + a) = 1.$$

Подставим числовые значения:  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

Ответ:  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

### Пример 2.4

Частица принимает участие одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения движения которых, имеют вид:  $x = A_1 \cos(\omega t)$ ,  $y = A_2 \cos(2\omega t)$ , где  $A_1 = 5$  см,  $A_2 = 8$  см. Найти уравнение траектории частицы.

Дано:  $A_1 = 5$  см,  $A_2 = 8$  см.

Найти:  $y(x)$  —?

Решение

Чтобы найти уравнение траектории частицы  $y(x)$ , необходимо исключить время  $t$  из заданных уравнений  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Для этого воспользуемся тригонометрической формулой  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ . В данном случае  $\alpha = \omega t$ .

Из уравнения  $x(t)$  выражаем косинус:  $\cos(\omega t) = \frac{x}{A_1}$ .

А из уравнения  $y(t)$  находим  $\cos(2\omega t) = \frac{y}{A_2}$ .

Откуда следует, что  $\frac{y}{A_2} = 2\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 - 1$ , или  $y = \frac{A_2}{(A_1)^2} x^2 - A_2$ .

Полученное уравнение представляет собой уравнение параболы.

Подставим числовые значения:  $y = 0,64 \cdot x^2 - 8$ , см.

Ответ:  $y = 0,648 x^2 - 8$ , см.

## 3. Затухающие колебания

### Пример 3.1

Математический маятник длины  $l = 50$  см совершает малые колебания в среде, в которой коэффициент затухания  $b = 0,9$  с<sup>-1</sup>. Определить время  $t$  и число полных колебаний  $N$ , по истечении которых амплитуда маятника уменьшается в 5 раз.

Дано:  $l = 50$  см,  $b = 0,9$  с<sup>-1</sup>.  $A_1/A_2 = 5$ .

Найти:  $t$  —?  $N$  —?

Решение

При отсутствии трения малые колебания математического маятника происходят по гармоническому закону с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (3.1.1)$$

Вследствие трения колебания будут затухающими, период которых равен:

$$T = \frac{2p}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}. \quad (3.1.2)$$

Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону:

$$A = A_0 e^{-bt}, \quad (3.1.3)$$

где  $A_0$  – значение амплитуды в начальный момент времени.

Запишем выражения для амплитуды колебаний в момент времени  $t$  и  $t+t$ :

$$A_1 = A_0 e^{-bt}, \quad A_2 = A_0 e^{-b(t+t)}. \quad (3.1.4)$$

Из формулы (3.1.4) видно, что отношение амплитуд  $A_1/A_2 = e^{bt} = 5$ . Логарифмируя это выражение, находим

$$bt = \ln 5, \text{ и } t = \frac{\ln 5}{b}. \quad (3.1.5)$$

Подставим числовые значения:  $t = \frac{\ln 5}{b} = 1,79$  с.

Число полных колебаний  $N$  за время  $t$  равно отношению

$$N = \frac{t}{T}. \quad (3.1.6)$$

Определим по формуле (3.1.1) собственную циклическую частоту математического маятника и, подставив ее в (3.1.2), найдем период затухающих колебаний

$$T = \frac{2p}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} = \frac{2p}{\sqrt{\frac{g}{l} - b^2}}. \quad (3.1.7)$$

Подставим числовые значения:  $T = \frac{2p}{\sqrt{\frac{10}{0,5} - 0,9^2}} = 1,45$  с.

Из сравнения  $T$  и  $t$  видно, что число полных колебаний  $N$  за время  $t$  равно  $1 < N < 2$ , т.е. за два полных колебаний амплитуда уменьшается более чем в 5 раз.

Ответ:  $t = 1,79$  с,  $12 \text{ Н}$  .

### Пример 3.2

Тело массой  $m = 5$  г совершает затухающие колебания. В течение одной минуты амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. Определить коэффициент сопротивления  $r$ .

Дано:  $m = 5$  г  $= 5 \cdot 10^{-3}$  кг,  $t = 1$  мин  $= 60$  с,  $A_0/A_1 = 2$ .

Найти:  $r$  –?

Решение

Коэффициент сопротивления  $r$  для механических колебательных систем связан с коэффициентом затухания  $b$  и массой тела  $m$  соотношением:

$$r = 2 b . \quad (3.2.1)$$

Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону:

$$A = A_0 e^{-bt}, \quad (3.2.2)$$

где  $A_0$  – значение амплитуды в начальный момент времени.

Выразим коэффициент затухания из формулы (3.2.2):

$$bt = \ln \left( \frac{A_0}{A_1} \right) .$$

Откуда 
$$b = \frac{\ln 2}{t} . \quad (3.2.3)$$

Значение коэффициента затухания (3.2.3) подставим в (3.2.1):

$$r = 2 b = \frac{\ln 2}{t} . \quad (3.2.4)$$

Подставим числовые значения:

$$r = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \frac{0,693}{60} = 1,155 \cdot 10^{-4} \text{ кг/с} .$$

Ответ:  $r = 1,155 \cdot 10^{-4}$  кг/с.

### Пример 3.3

Определить логарифмический декремент колебаний  $I$ , при котором энергия маятника за  $N = 5$  полных колебаний уменьшилась в 8 раз.

Дано:  $N = 5$ ,  $W_0/W_1 = 8$ .

Найти:  $I$  –?

Решение

Логарифмический декремент затухания  $I$  определяется

$$I = T, \quad (3.3.1)$$

где  $b$  – коэффициент затухания,  $T$  – период затухающих колебаний.

Энергия системы при затухающих колебаниях убывает со временем по закону (1.56):

$$W = W_0 e^{-2bt}, \quad (3.3.2)$$

где  $W_0$  – значение энергии в начальный момент времени  $t = 0$ .

Выразим коэффициент затухания из формулы (3.3.2):

$$2bt = \ln \frac{W_0}{W_1}, \quad \text{откуда} \quad b = \frac{\ln 8}{2t}. \quad (3.3.3)$$

Период колебаний равен отношению времени  $t$  к числу колебаний  $N$ :

$T = \frac{t}{N}$ . Следовательно, время колебаний  $t$  будет равно:  $t = NT$ . Подставив в

(3.3.3), получим, что  $b = \frac{\ln 8 \ln 8}{2NT}$ .

Откуда получаем выражение для логарифмического декремента колебаний:

$$I = T \frac{\ln 8}{2N}. \quad (3.3.4)$$

Подставим числовые значения:

$$I = \frac{\ln 8}{25} = 0,208.$$

Ответ:  $I = 0,208$ .

### Пример 3.4

Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью  $L = 10$  мГн, конденсатора емкостью  $C = 0,1$  мкФ и резистора сопротивлением  $R = 20$  Ом. Определите число полных колебаний  $N$ , за которые амплитуда тока в контуре уменьшится в  $e$  раз.

Дано:  $L = 10$  мГн =  $10^{-2}$  Гн,  $C = 0,1$  мкФ =  $10^{-7}$  Ф,  $R = 20$  Ом,  $\frac{I_{m0}}{I_{mN}} = e$ .

Найти:  $N$  – ?

Решение

Число колебаний  $N$  равно отношению времени  $t$  к периоду колебаний  $T$ :

$$N = \frac{t}{T}. \quad (3.4.1)$$

Амплитуда силы тока в контуре убывает со временем по экспоненциальному закону:

$$I_m = I_0 e^{-bt}, \quad (3.4.2)$$

где коэффициент затухания для колебательного контура определяется выражением:

$$b = \frac{R}{2L}. \quad (3.4.3)$$

По условию задачи отношение амплитуд силы тока начальной  $I_{m0}$  к конечной  $I_m$  за время  $t$  равно  $e$ , т.е.  $I_{m0}/I_m = e^{bt}$ .

Логарифмируя это выражение, находим  $bt = \ln e = 1$ , и, следовательно,

$$t = \frac{1}{b}. \quad (3.4.4)$$

Используя формулу (3.4.4), находим, что время колебаний  $t$  равно

$$t = \frac{2L}{R}. \quad (3.4.5)$$

Период затухающих колебаний определяется:

$$T = \frac{2p}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}. \quad (3.4.6)$$

Собственная циклическая частота электрического контура равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Подставив значения  $\omega_0$  и  $b$  в (3.4.6), найдем период затухающих колебаний:

$$T = \frac{2p}{\sqrt{\frac{1}{LCL} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (3.4.7)$$

Определив время колебаний  $t$  (3.4.5) и период  $T$  (3.4.7), из формулы (3.4.1) получим выражение для числа колебаний  $N$ :

$$N = \frac{tLR}{TRL} \sqrt{\frac{1}{LCL} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (3.4.8)$$

Подставим числовые значения:

$$N = \frac{0,01120}{3,142010} \sqrt{\frac{1}{10410} - \frac{R^2}{4L^2}} = 5.$$

Ответ:  $N = 5$

### Пример 3.5

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C = 0,02$  мкФ и катушки длиной  $l = 20$  см радиусом  $r = 2$  см из медной проволоки диаметром  $D = 1$  мм. Найти логарифмический декремент затухания контура  $\lambda$ . (Удельное сопротивление меди  $r = 0,017$  мкОм·м =  $1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м)

Дано:  $C = 0,02$  мкФ =  $2 \cdot 10^{-8}$  Ф,  $l = 20$  см,  $r = 2$  см,

$r = 0,017$  мкОм·м =  $1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м,  $d = 1$  мм.

Найти:  $\lambda$  -?

Решение

Логарифмический декремент затухания  $\lambda$  определяется по формуле

$$\lambda = T \frac{R}{2L} \frac{2p}{w}, \quad (3.5.1)$$

где  $b = \frac{R}{2L}$  - коэффициент затухания;  $R$  - сопротивление контура;  $L$  - индуктивность катушки;

$w = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$  - циклическая частота затухающих колебаний;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  - собственная циклическая частота. При подстановке значений  $\omega_0$  и  $b$

выражение для  $w$  будет:

$$w = \sqrt{\frac{1}{LCL} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (3.5.2)$$

Для определения логарифмического декремента затухания необходимо найти сопротивление контура  $R$  и индуктивность катушки  $L$ . Определим индуктивность катушки  $L$  как индуктивность соленоида:

$$L = \frac{\mu \mu_0 N^2 S}{l}, \quad (3.5.3)$$

где  $N$  - число витков соленоида;  $l$  - его длина;  $S$  - площадь поперечного сечения;  $\mu$  - магнитная проницаемость сердечника (для вакуума, воздуха  $\mu = 1$ );  $\mu_0$  - магнитная постоянная ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м).

Так как витки в соленоиде намотаны плотно друг к другу, то число витков  $N$  определится отношением длины соленоида к диаметру проволоки:

$$N = \frac{l}{d}. \quad (3.5.4)$$

Площадь поперечного сечения определится через радиус  $r$  соленоида:  $S = \pi r^2$ . Подставив значения  $N$  и  $S$  в формулу (3.5.3), найдем выражение для индуктивности соленоида:

$$L = \frac{\mu \mu_0 \pi r^2 l}{d^2}. \quad (3.5.5)$$

Сопротивление проводника  $R$  зависит от длины проводника  $l_{np}$ , площади поперечного сечения  $S_{np}$ :

$$R = r \frac{l_{np}}{S_{np}}. \quad (3.5.6)$$

Площадь поперечного сечения проводника  $S_{np}$  определим через его диаметр  $d$

$$S_{np} = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (3.5.7)$$

Соленоид можно представить как совокупность  $N$  круговых витков. Тогда длину проводника  $l_{np}$  вычислим: произведение числа витков на длину одного витка  $l_{np} = N \cdot 2\pi r$ , где  $r$  - радиус соленоида.

Используя формулу (3.5.4), находим, что  $l_{np} = \frac{l}{d} \cdot 2\pi r$ .

Тогда выражение для сопротивления проводника примет вид:

$$R = r \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{2\pi r}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{48}{d^3} r^2 l. \quad (3.5.8)$$

Для определения логарифмического декремента затухания  $I$  вычислим числовые значения сопротивления контура  $R$  (3.5.8), индуктивности катушки  $L$  (3.5.5) и циклической частоты (3.5.2) и подставим в формулу (3.5.1).

Сделаем числовые расчеты:

$$R = \frac{81,7 \cdot 10^{-9} \cdot 100,2}{10^{-9}} = 54,4 \text{ Ом.}$$

$$L = \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 24 \cdot 10}{10^{-6}} = 31,6 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{110105,4}{LCL}} = \sqrt{\frac{110105,4}{4231,64 \cdot (31,610)}} = 3,88 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}.$$

$$I = \frac{R}{2\omega L} = \frac{54,4}{2 \cdot 3,88 \cdot 10^5 \cdot 31,610} = 1,39.$$

Ответ:  $I = 1,39$ .

### Пример 3.6

За время 2 минуты теряется 40% энергии колебаний маятника. Определить коэффициент затухания.

Дано:  $\Delta W = 40\%$   $W_0$ ,  $t = 2$  мин = 120 с.

Найти:  $b$  -?

Решение

По условию задачи 40% энергии колебаний теряется. Следовательно, относительно первоначального запаса энергии осталось 60% энергии, т.е.

$$W = 0,6 W_0. \quad (3.6.1)$$

Энергия системы при затухающих колебаниях убывает со временем по закону (1.56):

$$W = W_0 e^{-2bt}, \quad (3.6.2)$$

где  $W_0$  - значение энергии в начальный момент времени  $t=0$ .

Выразим коэффициент затухания из формулы (3.6.2):

$$\ln \frac{W}{W_0} = -2bt, \quad \frac{W}{W_0} = \frac{5}{3}, \quad \text{откуда } b = \frac{\ln(\frac{5}{3})}{2t}. \quad (3.6.3)$$

Подставим числовые значения:

$$b = \frac{\ln(\frac{5}{3})}{2 \cdot 2120} = \text{с}^{-1}.$$

$$\text{Ответ: } b = 1,39 \text{ с}^{-1}.$$

#### 4. Переменный ток

##### Пример 4.1

Катушка длиной  $l = 40$  см и площадью поперечного сечения  $S = 5$  см<sup>2</sup> включена в цепь переменного тока частотой  $\nu = 50$  Гц. Число витков катушки  $N = 2000$ . Найти сопротивление  $R$  катушки, если сдвиг фаз между напряжением и током  $\alpha = 45^\circ$ .

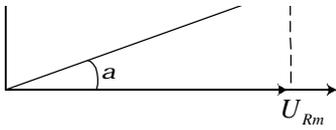
*Дано:*  $l = 40$  см = 0,4 м,  $\nu = 50$  Гц,  $S = 5$  см<sup>2</sup> =  $5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $N = 2000$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

*Найти:*  $R$  -?

*Решение*

Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и сопротивления. Воспользуемся векторной диаграммой, см. рис.

Изменение напряжения на катушке индуктивности  $U_L$  опережает по фазе колебания силы тока на  $\frac{\pi}{2}$ . Изменения напряжения на активном сопротивлении  $U_R$  происходят синфазно с колебаниями силы тока в цепи. Поэтому на векторной диаграмме колебания  $U_L$  и  $U_R$  представлены векторами длиной  $U_{Lm}$  и  $U_{Rm}$ , соответственно, расположенными под углом  $\frac{\pi}{2}$  друг к другу (причем, вектор  $U_{Lm}$  повернут относительно вектора  $U_{Rm}$  по часовой стрелке). Сумма этих двух векторов будет равна вектору, длиной  $U_m$ , изображающему колебание приложенного внешнего напряжения. Угол  $\alpha$  между векторами  $U_m$  и  $U_{Rm}$  равен сдвигу фаз между приложенным внешним напряжением и изменением тока в цепи.



Из рисунка видно, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{U_{Lm}}{U_{Rm}}$ .

(4.1.1)

Амплитуда напряжения на катушке индуктивности  $U_{Lm}$  равна  $U_{Lm} = w I_m$ , а амплитуда напряжения на активном сопротивлении  $U_{Rm} = I_m R$ . Подставляя значения напряжений в формулу (4.1.1) и учитывая, что  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ , получим

$$\frac{wL}{R} = 1, \text{ или } R = wL. \quad (4.1.2)$$

Индуктивность катушки  $L$  определяется по формуле индуктивности соленоида:

$$L = \frac{\mu \mu_0 N^2 S}{l}, \quad (4.1.3)$$

где  $N$  – число витков соленоида;  $l$  – его длина;  $S$  – площадь поперечного сечения;  $\mu$  – магнитная проницаемость сердечника (для вакуума, воздуха  $\mu = 1$ );  $\mu_0$  – магнитная постоянная ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м).

Подставив (4.1.3) в (4.1.2), получим:

$$R = w \frac{\mu \mu_0 N^2 S}{l} = 250 \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 0,4^2}{0,4} = 1,97 \text{ Ом}. \quad (4.1.4)$$

Подставим числовые значения:

$$R = 250 \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 0,4^2}{0,4} = 1,97 \text{ Ом}.$$

Ответ:  $R = 1,97$  Ом.

### Пример 4.2

В цепь переменного тока включены последовательно емкость  $C$ , сопротивление  $R$  и катушка индуктивности  $L$ . Амплитуда переменного напряжения  $U_m = 220$  В. Найти амплитуду падения напряжения на сопротивлении  $U_{Rm}$ , если известно, что амплитуда падения напряжения на конденсаторе равно  $U_{Cm} = 3 \cdot U_{Rm}$ , а на индуктивности  $U_{Lm} = 4 \cdot U_{Rm}$ .

Дано:  $U_m = 220$  В,  $U_{Cm} = 3 \cdot U_{Rm}$ ,  $U_{Lm} = 4 \cdot U_{Rm}$ .

Найти:  $U_{Rm} - ?$

### Решение:

Для решения задачи воспользуемся векторной диаграммой, приведенной на рис. 2.6,а в разделе «Вынужденные электромагнитные колебания».

Из векторной диаграммы, по теореме Пифагора, видно, что

$$U_m^2 = U_{Rm}^2 + U_{Cm}^2 + U_{Lm}^2. \quad (4.2.1)$$

Из условия задачи получается  $U_{Rm} = U_m \sqrt{2}$ . Тогда формула (4.2.1) преобразуется:

$$U_{Rm} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (4.2.2)$$

Из формулы (4.2.2) следует, что  $U_{Rm} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ . (4.2.3)

Подставим числовые значения:

$$U_{Rm} = \frac{220}{\sqrt{2}} = 155,6 \text{ В.}$$

Ответ:  $U_{Rm} = 155,6 \text{ В.}$

### Пример 4.3

Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью  $L = 2 \text{ мГн}$  и резистора сопротивлением  $R = 4 \text{ кОм}$ . При какой частоте  $\nu$  переменного тока полное сопротивление  $Z$  в три раза больше его активного сопротивления  $R$ ?

Дано:  $R = 4 \text{ кОм} = 4 \cdot 10^3 \text{ Ом}$ ,  $L = 2 \text{ мГн} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ ,  $Z = 3 R$ .

Найти:  $\nu$  -?

Решение

Полное сопротивление переменного тока контура, состоящего из катушки индуктивностью  $L$  и резистора сопротивлением  $R$ , определится:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (4.3.1)$$

Так как по условию задачи полное сопротивление  $Z$  в три раза больше его активного сопротивления  $R$ , то из (4.3.1) следует

$$Z = 3R \quad (4.3.2)$$

Откуда  $8R^2 = \omega^2 L^2$ , или  $\sqrt{8R} = \omega L$ .

Частота  $\nu$ , удовлетворяющая условию  $Z = 3R$ , будет равна

$$\nu = \frac{\sqrt{8R}}{2\pi L} \quad (4.3.3)$$

Подставим числовые значения:

$$\nu = \frac{\sqrt{8 \cdot 4 \cdot 10^3}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 9 \cdot 10^5 \text{ Гц.}$$

Ответ:  $\nu = 9 \cdot 10^5 \text{ Гц.}$

### Пример 4.4

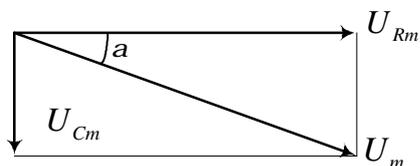
В цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов: конденсатора емкостью  $C = 0,1 \text{ мкФ}$  и резистора сопротивлением  $R$ , подключен источник переменного напряжения  $U = 20 \cos 200\pi t \text{ В}$ . Найти полное сопро-

тивление цепи  $Z$  и амплитуду силы тока  $I_m$ , если сдвиг фаз между напряжением и током  $a = 30^\circ$ .

Дано:  $C = 0,1 \text{ мкФ} = 10^{-7} \text{ Ф}$ ,  $a = 30^\circ$ ,  $U_t = 20 \cos 200 p \text{ В}$ .

Найти:  $Z$ ?  $I_m$ ?

Решение



Цепь переменного тока кроме источника переменного напряжения содержит конденсатор и сопротивление. Воспользуемся векторной диаграммой (рис.).

Изменение напряжения на конденсаторе  $U_C$  отстает по фазе от Рис.4.4.1.

изменения силы тока на  $\frac{p}{2}$ . Изменения напряжения на активном сопротивлении  $U_R$  происходят синфазно с колебаниями силы тока в цепи. Поэтому на векторной диаграмме колебания  $U_C$  и  $U_R$  представлены векторами длиной  $U_{Cm}$  и  $U_{Rm}$ , соответственно расположенными под углом  $\frac{p}{2}$  друг к другу (причем вектор  $U_{Cm}$  повернут относительно вектора  $U_{Rm}$  против часовой стрелки). Сумма этих двух векторов будет равна вектору длиной  $U_m$ , изображающему колебание приложенного внешнего напряжения. Угол  $a$  между векторами  $U_m$  и  $U_{Rm}$  равен сдвигу фаз между приложенным внешним напряжением и изменением тока в цепи.

Из рисунка видно, что

$$U_{Cm} = U_m \sin a. \quad (4.4.1)$$

Амплитуда напряжения на конденсаторе равна:

$$U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C}. \quad (4.4.2)$$

Откуда амплитуда силы тока  $I_m$  в цепи определится

$$I_{m\text{см}} = \omega C U_m \sin a. \quad (4.4.3)$$

Подставляя формулу (4.4.1) в (4.4.2), получим

$$I_{m\text{см}} = \omega C U_m \sin a. \quad (4.4.4)$$

Уравнение изменения переменного напряжения в общем виде будет выглядеть  $U_t = U_m \cos \omega t$ . Сравнивая это уравнение с законом  $U_t = 20 \cos 200 p$ , находим, что амплитуда переменного напряжения  $U_m = 20 \text{ В}$ , а его циклическая частота  $\omega = 200 p \text{ с}^{-1}$ .

Подставим числовые значения в формулу (4.4.4):

$$I_m = 200 p \cdot 0,1 \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot \sin 30^\circ = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ А}.$$

Полное сопротивление цепи  $Z$ , состоящей из последовательно соединенных конденсатора и резистора, определится:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (4.4.5)$$

В формуле (4.4.5) величина сопротивления  $R$  неизвестна. Из рисунка видно, что тангенс угла  $\alpha$  равен отношению  $U_{Cm}$  к  $U_{Rm}$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{U_{Cm}}{U_{Rm}} = \frac{1/\omega C}{R}. \quad (4.4.6)$$

Из формулы (4.4.6) находим:

$$R = \frac{1}{\omega C \operatorname{tg} \alpha}. \quad (4.4.7)$$

Подставим (4.4.7) в формулу (4.4.5), получим:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \cdot \sin \alpha. \quad (4.4.8)$$

Подставим числовые значения в формулу (4.4.8):

$$Z = \frac{1}{200 \cdot 100,5^{-7}} = 31,85 \cdot 10^3 \text{ Ом.}$$

$$\text{Ответ: } Z = 31,85 \cdot 10^3 \text{ Ом, } I_m = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ А.}$$

#### Пример 4.5

В цепь колебательного контура, состоящего из последовательно соединенных конденсатора емкостью  $C = 40 \text{ мкФ}$ , резистора с сопротивлением  $R = 50 \text{ Ом}$  и катушки с индуктивностью  $L = 0,5 \text{ Гн}$ , подключено переменное внешнее напряжение с амплитудным значением  $U_m = 180 \text{ В}$  частотой  $\nu = 50 \text{ Гц}$ . Найти полное сопротивление цепи  $Z$  и амплитуду силы тока  $I_m$ .

*Дано:*  $C = 40 \text{ мкФ} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Ф}$ ,  $R = 50 \text{ Ом}$ ,  $U_m = 180 \text{ В}$ ,  $\nu = 50 \text{ Гц}$ .

*Найти:*  $Z$ ?,  $I_m$ ?

*Решение*

Полное сопротивление цепи  $Z$ , состоящей конденсатора, резистора и катушки с индуктивности определится по формуле

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (4.5.1)$$

где  $\omega = 2\pi\nu = 314 \text{ с}^{-1}$ . Амплитуду силы тока  $I_m$  найдем из закона Ома для переменного тока:

$$I_m = \frac{U_m}{Z}. \quad (4.5.2)$$

Подставим числовые значения в формулы (4.5.1) и (4.5.2):

$$Z = \sqrt{50^2 + 3140,5^2} = \frac{1}{314410^{-5}} = 92,1 \text{ Ом}; I_m = \frac{180}{92,1} = 1,95 \text{ А.}$$

Ответ:  $Z=92,1 \text{ Ом}$ ,  $I_m = 1,95 \text{ А}$ .

## 5. Механические и электромагнитные волны

### Пример 5.1

Звуковые колебания, имеющие частоту  $\nu = 450 \text{ Гц}$  и амплитуду  $A = 0,3 \text{ мм}$ , распространяются в воздухе. Длина волны  $\lambda = 80 \text{ см}$ . Найти скорость распространения волн  $u$  и максимальную скорость колебаний частиц воздуха

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\max}$$

Дано:  $\nu=450 \text{ Гц}$ ,  $A=0,3 \text{ мм}=3 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ,  $\lambda = 80 \text{ см}=0,8 \text{ м}$ .

Найти:  $u$  —?  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\max}$  —?

Решение

Запишем уравнение плоской волны  $x = A \cos\left(\frac{x}{u} \cdot \dots\right)$  (5.1.1)

Скорость распространения волны равна  $u = \nu \cdot \lambda$ . (5.1.2)

Скорость колебаний частиц воздуха определится как первая производная смещения  $x$  (5.1.1) по времени:  $\frac{dx}{dt} = -A \omega \sin(\dots) = \frac{x}{u} \cdot \dots$ . Модуль величины, стоящей перед синусом, и представляет собой максимальную скорость колебаний частиц:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\max} = A \omega = A \cdot 2\pi \nu \quad (5.1.3)$$

Подставим числовые значения в формулы (5.1.2) и (5.1.4):

$u = 450 \cdot 0,8 = 360 \text{ м/с}$ .

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\max} = 2\pi \cdot 0,3 \cdot 10^{-4} \cdot 450 = 0,848 \text{ м/с}.$$

Ответ:  $u = 360 \text{ м/с}$ ,  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\max} = 0,848 \text{ м/с}$ .

### Пример 5.2

Упругая волна распространяется вдоль оси  $x$  со скоростью  $u = 15 \text{ м/с}$ . Период колебаний частиц среды равен  $T = 1,2 \text{ с}$ , амплитуда  $A = 2 \text{ см}$ . Определить

длину волны  $\lambda$ , смещение  $x$ , скорость  $\frac{dx}{dt}$  и ускорение  $\frac{d^2x}{dt^2}$  точки, находящейся от источника колебаний на расстоянии  $x=45$  м в момент времени  $t=4$  с.

Дано:  $u=15$  м/с,  $A=2$  см= $0,02$  м,  $T=1,2$  с,  $x=45$  м,  $t=4$  с.

Найти:  $\lambda$  —?  $x$  —?  $\frac{dx}{dt}$  —?  $\frac{d^2x}{dt^2}$  —?

Решение

Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется фаза колебания за время, равное периоду  $\lambda = T \cdot u$ . (5.2.1)

Запишем уравнение плоской волны

$$x = A \cos(\omega t - kx), \quad (5.2.2)$$

где  $x$  — смещение колеблющейся точки;  $x$  — расстояние точки от источника колебаний;  $\omega$  — циклическая частота колебаний, равная  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Скорость колебаний точки находим, взяв первую производную от смещения  $x$  (5.2.2) по времени:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - kx) \quad (5.2.3)$$

Взяв вторую производную  $x$  (5.2.2) по времени, найдем ускорение колебаний точки:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx) \quad (5.2.4)$$

Подставим числовые значения в формулы (5.2.1)–(5.2.4):

$$\lambda = 15 \cdot 1,2 = 18 \text{ м.}$$

$$x = 0,02 \cos\left(\frac{2\pi \cdot 45}{1,2} - \frac{2\pi \cdot 4}{1,2}\right) = 0,01 \text{ м.}$$

$$\frac{dx}{dt} = -0,02 \cdot \frac{2\pi}{1,2} \sin\left(\frac{2\pi \cdot 45}{1,2} - \frac{2\pi \cdot 4}{1,2}\right) = 0,09 \text{ м/с, } \frac{d^2x}{dt^2} = 0,027 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{Ответ: } \lambda = 18 \text{ м, } x = 0,01 \text{ м, } \frac{dx}{dt} = 0,09 \text{ м/с, } \frac{d^2x}{dt^2} = 0,027 \text{ м/с}^2.$$

### Пример 5.3

Плоская волна распространяется вдоль оси  $x$  со скоростью  $u = 20$  м/с. Амплитуда колебаний частиц среды равна  $A = 10$  см. Две точки, находящиеся от источника колебаний на расстоянии  $x_1 = 12$  м и  $x_2 = 15$  м, колеблются с разностью фаз  $\Delta j = \frac{3}{4}\pi$ . Определить длину волны  $\lambda$  и смещение  $x$  данных точек в момент времени  $t=1,2$  с.

Дано:  $u=20$  м/с,  $A=10$  см=0,1 м,  $x_1=12$  м,  $x_2=15$  м,  $\Delta j = \frac{3}{4}p$ ,  $t=1,2$  с.

Найти:  $I$  —?  $x_1$ —?  $x_2$ —?

Решение

Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны  $I$ , колеблются с разностью фаз  $\Delta\varphi = 2\pi$ . А точки, находящиеся друг от друга на расстоянии  $\Delta x$ , колеблются с разностью фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{I} \Delta x \quad (5.3.1)$$

Из формулы (5.3.1) получаем выражение для длины волны  $I$ :

$$I = 2 \frac{\Delta x}{\Delta\varphi} \quad (5.3.2)$$

Подставим числовые значения:

$$I = 2 \frac{(15-12)}{\frac{3}{4} \cdot 2\pi} = 8 \text{ м.}$$

Смещение  $x$  колеблющейся точки в момент времени  $t$  определим из уравнения плоской волны  $x = A \cos(\omega t - kx)$ .

$$(5.3.3)$$

Циклическую частоту колебаний, входящую в формулу (5.3.1), найдем, зная скорость  $u$  и длину волны  $I$ :  $\omega = \frac{2\pi u}{I}$ .

$$(5.3.4)$$

Определим численное значение:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 20}{8} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Чтобы найти смещение  $x$  данных точек, нужно подставить значения  $x$  и  $t$  в уравнение плоской волны  $x = A \cos(\omega t - kx)$ .

$$x = A \cos\left(0,1 \cos 5(1,2) - \frac{12}{20}\right) = -0,1 \text{ м.}$$

$$x = A \cos\left(0,1 \cos 5(1,2) - \frac{15}{20}\right) = 0,071 \text{ м.}$$

Ответ:  $I = 8$  м,  $x_1 = -0,1$  м,  $x_2 = 0,071$  м.

#### Пример 5.4

Определить длину электромагнитной волны  $I$  в вакууме, на которую настроен идеальный колебательный контур, если максимальный заряд на обкладках конденсатора равен  $q_m = 5$  мкКл, а максимальное значение силы тока в контуре  $I_m = 3$  мА. Скорость света в вакууме равна  $u = 3 \cdot 10^8$  м/с.

Дано:  $q_m = 5$  мкКл,  $I_m = 3$  мА,  $u = 3 \cdot 10^8$  м/с.

Найти:  $I$  –?

Решение

Изменение заряда на обкладках конденсатора в идеальном колебательном контуре происходит по закону:

$$q(t) = q_m \cos(\omega t). \quad (5.4.1)$$

Чтобы найти закон изменения силы тока в цепи контура, нужно взять производную от выражения (5.4.1) по времени:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t), \quad (5.4.2)$$

где  $I_m$  - амплитуда силы тока

$$I_m = \omega q_m. \quad (5.4.3)$$

Из формулы (5.4.3) следует, что циклическая частота колебаний равна:

$$\omega = \frac{I_m}{q_m}. \quad (5.4.4)$$

Длина волны равна 
$$l = \frac{c}{\omega} = \frac{c q_m}{I_m}. \quad (5.4.5)$$

Подставляя в (5.4.5) выражение для  $\omega$  (5.4.4), получим:

$$l = \frac{c q_m}{I_m}. \quad (5.4.6)$$

Подставим числовые значения:

$$l = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{310^{-3}} = 31,4 \cdot 10^5 \text{ м.}$$

Ответ:  $l = 31,4 \cdot 10^5 \text{ м.}$

### Пример 5.5

Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью  $L=0,5 \text{ мГн}$  и плоского конденсатора. Расстояние между пластинами конденсатора  $d=1,77 \text{ см}$ , диэлектрическая проницаемость вещества, заполнившего пространство между пластинами,  $\epsilon=5$ . Площадь каждой пластины  $S=20 \text{ см}^2$ . Скорость света в вакууме равна  $c=3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Определить длину электромагнитной волны  $l$  в вакууме, на которую настроен колебательный контур.

Дано:  $L=0,5 \text{ мГн} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}$ ,  $d=1,77 \text{ см} = 1,77 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,

$S=20 \text{ см}^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ ,  $\epsilon=5$ ,  $c=3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

Найти:  $l$  –?

Решение

Длина волны равна произведению скорости  $c$  на период колебаний  $T$ :

$$l = c T. \quad (5.5.1)$$

Период электромагнитных колебаний, происходящих в колебательном контуре, определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (5.5.2)$$

где  $L$  – индуктивность катушки;  $C$  – емкость конденсатора.

Тогда длина волны определится:

$$\lambda = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (5.5.3)$$

Емкость плоского конденсатора равна

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}, \quad (5.5.4)$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость вещества;  $d$  – расстояние между пластинами конденсатора;  $S$  – площадь пластин;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Кл/(м<sup>2</sup>·Н) – электрическая постоянная.

Подставим числовые значения в формулу (5.5.4):

$$C = \frac{58,8510210^{23}}{1,7710^{-2}} = 5 \cdot 10^{-12} \text{ Ф.}$$

Подставляя значение емкости конденсатора в (5.5.3), получим:

$$\lambda = 2\pi\sqrt{5 \cdot 10^{-12}} = 94,2 \text{ м.}$$

Ответ:  $\lambda = 94,2$  м.

## 6. Геометрическая оптика

В разделе «Геометрическая оптика» представлены задачи по трем основным темам:

- 1) преломление и отражение света на плоских поверхностях (зеркала, прозрачные среды с плоскими границами раздела, призмы),
- 2) преломление света на сферических поверхностях (зеркала, линзы),
- 3) оптические системы – совокупности призм, линз, зеркал, образующих оптические приборы: телескопы, фотоаппараты, бинокли, микроскопы, зрительные трубы.

После внимательного прочтения задачи и краткой записи известных данных следует сделать чертеж, отображающий сущность рассматриваемой оптической ситуации и геометрические соотношения между оптическими лучами и оптической поверхностью. Ход оптических лучей следует указывать в соответствии с законами преломления и отражения света. Если свет падает из оптически менее плотной среды в оптически более плотную среду, то на рисунке угол преломления следует указывать меньшим, чем угол падения<sup>10</sup>. При построении изображений в линзах рекомендуется использовать лучи, ход кото-

<sup>10</sup> На рисунках ход лучей изображаем слева на право. Если после прохождения оптической системы лучи пересекаются, то получают действительное изображение точки или предмета, в противном случае – мнимое.

рых известен из теории: лучи, проходящие через оптический центр, линзой не отклоняются. Лучи, параллельные главной оптической, оси собираются после прохождения линзы через главный фокус; лучи, параллельные побочной оптической оси, пересекаются в побочном фокусе. При построении хода произвольного луча следует использовать побочную оптическую ось, параллельную данному лучу, поскольку после прохождения линзы они соберутся в одной и той же точке – побочном фокусе.

Для удобства решения задач приводим основные законы геометрической оптики и математические соотношения, определяющие ход лучей в оптических системах.

- *Закон прямолинейного распространения световых лучей* (важен при выполнении чертежей, поясняющих ход оптических лучей): в однородной изотропной среде световой луч распространяется прямолинейно.

- *Принцип обратимости световых лучей*: луч, испущенный в обратном направлении, проходит те же точки пространства, что и луч, прошедший в прямом направлении.

- *Закон отражения*: угол падения луча  $\alpha$  равен углу отражения луча  $\beta$ :  $\alpha = \beta$ , где  $\alpha$  – угол падения,  $\beta$  – угол отражения.

- *Закон преломления*:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{1,2},$$

где  $\gamma$  – угол преломления;  $n_1$  и  $n_2$  – соответственно абсолютные показатели преломления первой и второй среды, при этом первая среда – это среда, из которой световой луч начинает идти;  $n_{1,2}$  – относительный показатель преломления второй среды относительно первой.  $n_1 = v_1/c$ ,  $n_2 = v_2/c$ .

- Наименьший угол отклонения светового луча  $\delta$ , падающего на боковую грань призмы, имеющей преломляющий угол  $\alpha$  (угол при вершине призмы), определяется выражением:  $n \cdot \sin(\alpha/2) = \sin(\delta/2 + \alpha/2)$ ,  $n$  – относительный показатель преломления материала призмы.

- *Формула тонкой линзы*:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – соответственно абсолютные показатели преломления линзы и среды, в которой располагается линза;  $a_1$  и  $a_2$  – соответственно расстояния от предмета до линзы и линзы до изображения;  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны передней и задней поверхностей линзы. В данной формуле предполагается, что справа и слева от линзы имеется одна и та же оптическая среда. Данная форму-

ла записана с учетом следующего правила знаков: *величины, отсчитываемые от оптического центра линзы влево в формулу подставляют со знаком «-», вправо – со знаком «+»*. Она справедлива для линз выпуклых, вогнутых, а также плосковыпуклых и плосковогнутых.

- Формула сферического зеркала:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{R}$ , где также учтено правило

знаков, изложенное выше.

- Оптическая сила системы тонких линз определяется формулой  $D = \sum_{i=1}^k D_i$ ,

где  $D_i$  – оптическая сила  $i$ -й линзы. При этом оптическая сила выпуклой линзы берется со знаком «+», вогнутой – со знаком «-».

- Линейным поперечным увеличением оптической системы  $\gamma$  называют величину, определяемую соотношением:  $\gamma = \frac{H}{h}$ , где  $h$  и  $H$  – соответственно высота предмета и его изображения.

- Угловое увеличение оптической системы  $\Gamma$  по определению равно:

$$\Gamma = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2},$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – соответственно углы, составляемые сопряженными лучами с оптической осью,  $a_1$  и  $a_2$  – соответственно расстояния от предмета до оптической системы и от оптической системы до изображения.

Примечание: если предмет и изображение расположены в одной и той же среде ( $n_1 = n_2$ ), то  $\gamma \cdot \Gamma = 1$ .

## Преломление и отражение света на плоских поверхностях

### Пример 6.1

Человек смотрит в зеркало, подвешенное вертикально. Будет ли изменяться величина видимой в зеркале части тела человека по мере удаления его от зеркала? Ответ пояснить построением.

#### Решение

Для решения задачи воспользуемся принципом обратимости световых лучей и определим те точки тела человека, которые он сможет видеть в вертикально стоящем зеркале. Пусть высота зеркала  $CD$  меньше высоты человека  $A_1B_1$ , см. рис. 6.1.1 (если зеркало имеет такую же или большую высоту, то ответ очевиден). Человек находится в двух позициях  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ . Точки  $A_1$  и  $A_2$  определяют положение глаз человека. Высота человека (до глаз) равна  $A_1B_1$ . Отрезки  $CF_1$  и  $DM_1$  перпендикулярны зеркалу  $CD$ . Луч  $E_1C$  определяет наименьший угол падения лучей, идущих от человека, при котором отраженный от зеркала свет сможет попасть в его глаза, луч  $A_1D$  – наибольший.

Из рисунка видно, что наивысшая точка тела человека, от которой свет попадает в глаз, есть  $E_1$ , т.е. она отстоит от глаз на расстоянии  $2A_1F_1$ , где  $F_1$  есть точка, лежащая на нормали, проведенной к верхнему краю зеркала. При удалении человека в позицию  $A_2B_2$  наивысшая видимая точка тела человека отстоит на расстоянии  $2A_2F_2$  от глаз, но  $A_1F_1 = A_2F_2$ , следовательно, при удалении человека от зеркала, положение наивысшей видимой его части остается неизменным.

Аналогично показывается, что положение наинизшей видимой точки тела, определяемое расстоянием  $2A_1M_1$ , также не меняется. Следовательно, при удалении или приближении человека от зеркала, независимо от его размера, величина видимой части тела не будет изменяться.

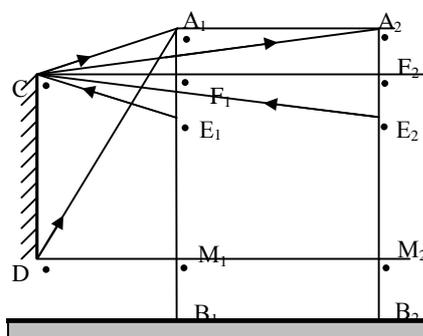


Рис. 6.1.1

### Пример 6.2

На плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной 1 см (рис. 6.2.1) падает луч света под углом  $60^\circ$ . Показатель преломления стекла 1,73. Часть света отражается, а часть, преломляясь, проходит в стекло, отражается от нижней поверхности пластинки, преломляется вторично, выходит обратно в воздух параллельно первому отраженному лучу. Определить расстояние  $L$  между лучами.

Дано:

$$\alpha = 60^\circ; n = 1,73; d = 1 \text{ см.}$$

Найти:  $L = EF = ?$

### Решение

Расстояние между лучами  $AF$  и  $EG$  (рис. 6.2.1) определяется вдоль перпендикуляра  $EF$ , длину которого и следует определить. Из закона отражения следует, что  $\angle FAC = 30^\circ$ , катет  $EF$ , лежащий против этого угла равен половине гипотенузы  $AE$ :

$$EF = 1/2 \cdot AE. \quad (6.2.1)$$

Гипотенузу  $AE$  можно определить из прямоугольного треугольника  $ACD$ , если учесть, что  $AC = CE$  (треугольники  $ACD$  и  $DCE$  равны), тогда  $FE = AC = BD$ . Катет  $BD$  определим из прямоугольного треугольника  $ABD$ , в котором угол  $\beta$  определяется из закона преломления:

$$\frac{\sin a}{\sin b} = n \sin \beta$$

Отсюда имеем:  $\sin\beta = \sin 60^\circ / 1,73 \approx 0,50$ ,  $\beta = \arcsin(0,50) \approx 30^\circ$ . Из прямоугольного треугольника ABD имеем  $\operatorname{tg}\beta = BD/AB$ , отсюда:

$$BD = AB \cdot \operatorname{tg}\beta. \quad (6.2.2)$$

Учитывая (6.2.1) и (6.2.2), получаем:

$$EF = L = AB \cdot \operatorname{tg}\beta = d \cdot \operatorname{tg}\beta. \quad (6.2.3)$$

Подставляя в (6.2.3) числовые данные, получим:

$$L = 1 \text{ см} \cdot \operatorname{tg}30^\circ \approx 0,58 \text{ см. Ответ: } L \approx 0,58 \text{ см.}$$

### Пример 6.3

Монохроматический луч входит через грань прямоугольной равнобедренной призмы (рис.6.3.1). Войдя в призму, луч претерпевает полное внутреннее отражение от грани, соответствующей гипотенузе, и выходит через грань, соответствующую другому катету. Каким должен быть наименьший угол падения луча на призму, чтобы еще происходило полное внутреннее отражение, если показатель преломления материала призмы для этого луча 1,5?

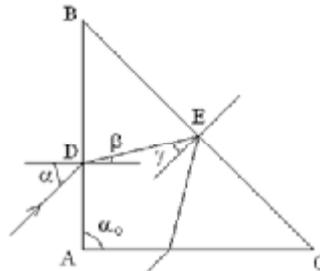


Рис. 6.3.1.

Дано:  $\alpha_0 = 90^\circ$ ;  $AB = AC$ ;  $n = 1,5$ .

Найти:  $\alpha_{\min} = ?$

#### Решение

Полное внутреннее отражение на границе BC наблюдается при выполнении условия:

$$\sin \alpha_{\text{пред}} = 1/n. \quad (6.3.1)$$

Отсюда можно определить предельный угол полного внутреннего отражения,  $\gamma_{\text{пред}} = \arcsin(1/n) = \arcsin(1/1,5) \approx 41,8^\circ$ . На рис. 6.3.1 показан ход лучей для случая, когда  $\gamma \geq \gamma_{\text{пред}}$ . Из треугольника DBE имеем следующую связь между его углами:  $[45^\circ + (90^\circ - \beta) + (90^\circ - \gamma_{\text{пред}})] = 180^\circ$ . Отсюда минимальное значение угла  $\beta$  равно:  $\beta_{\min} = 45^\circ - \gamma_{\text{пред}}$ . Из закона преломления, записанного для границы раздела АВ, получим:  $\sin \alpha_{\min} / \sin \beta_{\min} = n$  отсюда:

$$\alpha_{\min} = \arcsin[n \cdot \sin(45^\circ - \gamma_{\text{пред}})]. \quad (6.3.2)$$

Подставляя данные задачи и величину предельного угла, рассчитанного по формуле (6.3.1) в формулу (6.3.2), получаем:  $\alpha_{\min} = \arcsin[1,5 \cdot \sin(45^\circ - 41,8^\circ)] = 4,8^\circ$ .

Ответ:  $\alpha_{\min} = 4,8^\circ$

### Преломление и отражение света на сферических поверхностях.



Найти:  $a_1 = ?$ ,  $a_2 = ?$

**Решение**

Для решения задачи воспользуемся формулой тонкой линзы, записанной с учетом правила знаков:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n_{12} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Для плосковыпуклой линзы она примет вид:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n_D - 1) \frac{1}{R} \tag{6.5.1}$$

где  $a_1$  и  $a_2$  – соответственно расстояния от предмета до линзы и от линзы до изображения;  $n_{12}$  – относительный показатель преломления материала линзы;  $D$  – оптическая сила линзы. При записи формулы (6.5.1) мы учли, что плоская поверхность имеет радиус кривизны  $R_1 = \infty$ . Согласно определению линейного увеличения имеем:  $\gamma = a_2/a_1$ . Отсюда:

$$a_2 = \gamma \cdot a_1. \tag{6.5.2}$$

Решая совместно систему уравнений (6.5.1–6.5.2), получим:

$$a_1 = \frac{R_2(\gamma) + R_1}{\gamma - 1} \tag{6.5.3}$$

В формуле (6.5.3) мы учли, что  $n_{12} = n$ , т.к. линза находится в воздухе, а его абсолютный показатель преломления равен 1.

Для построения изображения, даваемого линзой, необходимо знать фокусное расстояние линзы  $F$ , оно определяется ее оптической силой  $D$  – правая часть уравнения (6.5.1). Так как  $D = 1/F$  отсюда получаем:

$$F = R_2 / (n - 1). \tag{6.5.4}$$

Подставляя числовые данные задачи в формулы (6.5.2– 6.5.4), получим:

$$a_1 = 0,90 \text{ м}, a_2 = 1,80 \text{ м}, F = 0,6 \text{ м}.$$

На основе этих данных построено изображение предмета (рис.6.5.1). При построении изображения точки  $B$  предмета мы воспользовались понятием *побочной оптической оси*.

Ответ:  $a_1 = 0,90$  см;  $a_2 = 1,80$  м.

**Оптические системы**

**Пример 6.6**

Зрительная труба с фокусным расстоянием объектива 50 см установлена на бесконечность. После того как окуляр трубы передвинули на некоторое

расстояние, стали ясно видны предметы, удаленные от объектива на 50 м. На какое расстояние передвинули окуляр при наводке?

Дано:  $F_1 = 50 \text{ см} = 50 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $a = 50 \text{ м}$ .

Найти:  $\Delta b = ?$

**Решение**

Зрительная труба представляет собой совокупность двух собирающих линз, длиннофокусной, играющей роль объектива (Об), и короткофокусной – окуляра (Ок). Если предмет находится на бесконечности от объектива, то объектив

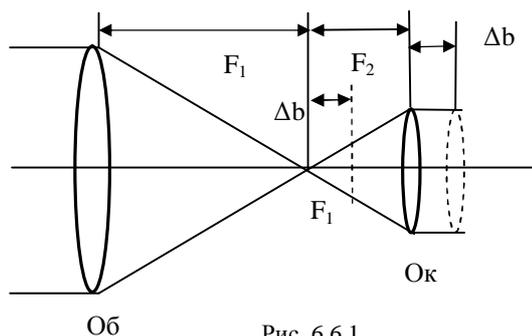


Рис. 6.6.1

дает действительное изображение предмета в задней фокальной плоскости или несколько дальше от нее, если предмет находится на конечном от объектива расстоянии. Это изображение рассматривается окуляром как лупой. На рисунке 6.6.2 представлен ход лучей в зрительной трубе установленной на бесконечность.

При наблюдении объекта на конечном расстоянии от зрительной трубы его изображение будет находиться в позиции, отмеченной на рис. 6.6.2 пунктиром, при этом расстояние от объектива до изображения, даваемого объективом, будет равно  $(F_1 + \Delta b)$ . Настолько же потребуется сместить вправо окуляр, чтобы увидеть это изображение с помощью окуляра.

Учитывая вышесказанное, запишем уравнение, определяющее ход лучей в объективе для конечного положения предмета в виде:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_1}$$

Подставляя данные условия задачи, получим уравнение:

$$\frac{1}{50} + \frac{1}{b} = \frac{1}{0,5}$$

Решая его относительно неизвестной величины  $\Delta b$ , получаем  $\Delta b = 0,0050 \text{ м} = 5,0 \text{ мм}$ . Ответ:  $\Delta b = 5,0 \text{ мм}$ .

**Пример 6.7**

Фокусные расстояния двух тонких собирающих линз равны  $F_1$  и  $F_2$ . Чему равно фокусное расстояние системы из этих двух линз, собранных вместе? Чему равна оптическая сила этой системы? Чему будет равно фокусное расстояние системы в случае, если вторая линза будет рассеивающей?

Дано:  $F_1$  и  $F_2$  – оптические силы линз.

Найти:  $D = ?$   $F = ?$

**Решение**

Оптическая сила системы тонких линз, сложенных вместе, определяется выражением:  $D = D_1 + D_2$ . Так как оптическая сила есть величина, обратная фокусному расстоянию, отсюда для фокусного расстояния системы двух тонких положительных линз получаем:

$$F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2}.$$

Если вторая линза будет рассеивающей (отрицательной), то оптическая сила системы двух линз определяется уравнением:

$$D = D_1 + D_2,$$

а фокусное расстояние этой системы будет равно

$$F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2}.$$

Сравнивая фокусные расстояния системы линз для обоих случаев, видим, что при сложении двух положительных линз фокусное расстояние системы уменьшается (оптическая сила увеличивается); при сложении положительной и отрицательной линз фокусное расстояние системы увеличивается (оптическая сила уменьшается).

## 7. Интерференция световых волн

Решение задач данного раздела следует начинать с анализа метода получения когерентных волн: метод деления волн по амплитуде или по фронту волны. Затем следует определить геометрическую разность хода. Геометрическая разность хода может быть найдена из рассмотрения хода лучей в конкретной схеме. При этом следует учесть, что для обычных источников света когерентность волн сохраняется при малой разности хода лучей. Если интерферирующие лучи проходят в разных средах, то необходимо определить оптическую разность хода  $\delta$  путем умножения геометрического пути  $\Delta r$  на абсолютный показатель преломления  $n$ . Если один из лучей отражается от оптически более плотной среды, то он испытывает скачок фазы на  $\pi$ , что соответствует увеличению оптической разности хода на  $\lambda/2$ , оптическая разность хода будет равна:

$$\delta = \Delta r \cdot n \pm \lambda/2.$$

Форма интерференционных полос определяется геометрическим местом точек, соответствующих одинаковой разности хода интерферирующих лучей.

После определения оптической разности хода  $\delta$  записывают условия усиления или ослабления волн при интерференции:

**Примечание [Н. П.2]:** Здесь следует сделать ссылку на теоретический материал с рис. 4 схем. Рисунок сделал под таким названием: 4 схемы интерференции

- усиление волн:  $dI = 2k \lambda / \dots$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,
- ослабление волн:  $dI = -2k \lambda / \dots$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ .
- Разность хода лучей при интерференции в тонких пленках и пластинках определяется выражением:

$$d \sin \alpha = 2n \sqrt{2} \lambda / \dots$$

где  $d$  – толщина пленки (пластинки);  $\alpha$  – угол падения лучей на пленку;  $n$  – абсолютный показатель преломления пленки. Данная формула может быть использована для определения оптической разности хода и для клиновидной пленки или пластинки ввиду малой величины угла между поверхностями пленки (пластики).

- Радиусы светлых и темных колец Ньютона в отраженном свете определяются соответственно выражениями:

$$r_k^2 = R \lambda (2k - 1) / 2, \quad /$$

где  $k$  – номер интерференционного кольца,  $k = 1, 2, 3 \dots$ ;  $R$  – радиус кривизны линзы. Оптическая разность хода лучей в опытах с кольцами Ньютона определяется такой же формулой, как и для плоскопараллельной пленки.

**Пример 7.1**

Два когерентных источника света ( $\lambda = 0,5$  мкм) дают интерференционную картину на плоскости, удаленной от них на расстоянии 2 м. Определить расстояние между источниками света, если расстояние  $\Delta x$  между соседними интерференционными полосами на экране в средней части интерференционной картины равно 1 см.

Дано:  $\lambda = 0,5$  мкм =  $0,5 \cdot 10^{-6}$  м;  $L = 2$  м;  $\Delta x = 1$  см =  $1 \cdot 10^{-2}$  м.

Найти:  $d = ?$

**Решение**

Положение интерференционных максимумов определяется условием:

$$\Delta r = k \lambda, \tag{7.1.1}$$

где  $k$  – целое число, включая 0 ( $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ ).

Для определения оптической разности хода  $\Delta r$ , обратимся к оптической схеме опыта, представленной на рис. 7.1.1, где через  $x$  обозначено расстояние от центра интерференционной картины до  $k$ -го интерференционного

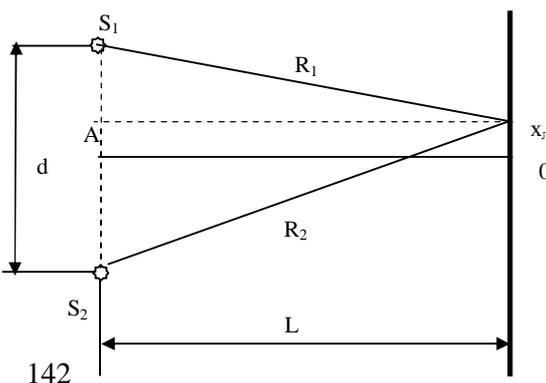


Рис. 7.1.1.

максимума, находящегося вблизи центра интерференционной картины (точка 0). Из прямоугольных треугольников  $AS_1X_k$  и  $S_2AX_k$  по теореме Пифагора имеем:

$$r_{1k}^2 = (L - \Delta l)^2 + x_k^2 \quad / \quad r_{2k}^2 = L^2 + x_k^2 \quad (7.1.2)$$

Вычитая почленно эти уравнения, получим:

$$r_{2k}^2 - r_{1k}^2 = 2Lx_k \quad (7.1.3)$$

Из (7.1.3) имеем:

$$r_{2k}^2 - r_{1k}^2 = 2Lx_k \quad \text{или} \quad \Delta l = \frac{x_k^2}{L} \quad (7.1.4)$$

В последнем уравнении мы учли, что  $r_{1k} \approx L + \frac{x_k^2}{2L}, \dots$  тк  $d \ll L$ . Из формулы (7.1.1) и (7.1.4) получаем:  $x_k = k \Delta l / \lambda$ . Тогда расстояние между соседними интерференционными полосами будет равно

$$\Delta x = \frac{d}{k+1} \quad (7.1.5)$$

Из формулы (7.1.5) окончательно получаем:

$$dL = \lambda \quad (7.1.6)$$

Подставляя данные условия в формулу (6), получим:

$$d = \frac{\lambda L}{\lambda} = 0,1 \text{ мм}$$

Ответ:  $d = 0,1$  мм.

### Пример 7.2

Между краями двух хорошо отшлифованных плоских пластинок помещена тонкая проволочка диаметром 0,05 мм; противоположные концы пластинок плотно прижаты друг к другу, рис. (7.2.1). Пластинки освещаются нормально к поверхности. На пластинке длиной 10 см наблюдатель видит интерференционные полосы, расстояние между которыми равно 0,6 мм. Определить длину волны.

Дано:  $d = 0,05$  мм =  $5 \cdot 10^{-5}$  м;  $L = 10$  см =  $10 \cdot 10^{-2}$  м;  $\Delta l = 0,6$  мм =  $6 \cdot 10^{-4}$  м.

Найти:  $\lambda = ?$

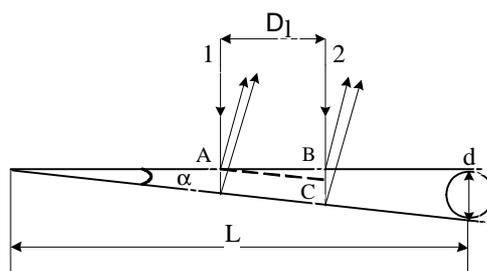


Рис. 7.2.2

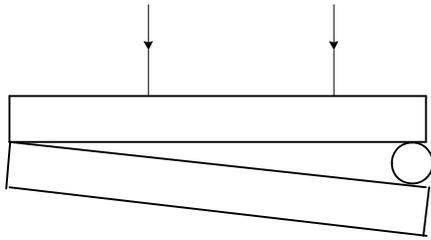


Рис.7.2.1

### Решение

Две пластинки образуют воздушный клин. При падении света на данную систему происходит отражение света от верхних и нижних поверхностей обеих пластинок. При этом ввиду значительной толщины пластинок когерентными будут только лучи, отраженные от нижней поверхности верхней пластинки и от верхней поверхности нижней пластинки. Поэтому для дальнейшего решения можно ограничиться рассмотрением воздушного клина, ограниченного указанными поверхностями (рис. 7.2.2) Точки  $A$  и  $B$  определяют положения соседних интерференционных максимумов. Этому расстоянию соответствует прирост разности хода, равный длине волны света  $\lambda$ . Как видно из рис. 7.2.2 ( $\triangle ABC$ ), прирост разности хода

$$\Delta r = 2BC \approx 2 \cdot AB \cdot \alpha \approx 2 \cdot AB \cdot (d/L) = 2 \cdot \Delta l \cdot (d/L). \quad (7.2.1)$$

В формуле (7.2.1) мы учли, что угол  $\alpha$  между пластинками равен углу  $BAC$ .

Тогда из формулы (7.2.1) и условия, что максимумы  $A$  и  $B$  являются соседними, получаем:

$$\lambda = 2 \cdot \Delta l \cdot (d/L). \quad (7.2.2)$$

Подставляя данные условия задачи, находим длину волны  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{20,610510^5}{1010^{-2}} \cdot 0,610 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

Ответ:  $\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6}$  м.

### Пример 7.3

Тонкая пленка с показателем преломления  $n = 1,5$  освещается рассеянным светом с длиной волны  $\lambda = 600$  нм. При какой минимальной толщине пленки исчезнут интерференционные полосы?

Дано:  $n = 1,5$ ;  $\lambda = 600$  нм =  $600 \cdot 10^{-9}$  м; свет рассеянный.

Найти:  $d_{\min} = ?$

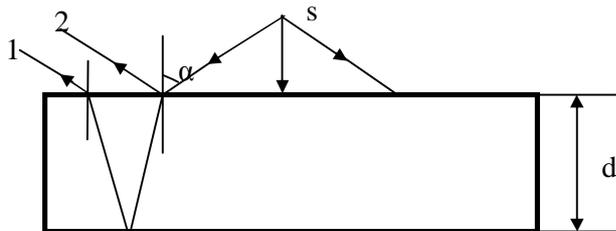


Рис. 7.3.1.

**Решение**

Так как на пластинку падает расходящийся пучок света, то это означает, что углы падения изменяются в пределах от 0 до 90°. На рисунке 7.3.1 для примера показаны три луча. Оптическая разность хода интерферирующих лучей 1 и 2 составляет величину:

$$2d \sin \alpha - \frac{\lambda}{2} \quad (7.3.1)$$

где величина  $\lambda/2$  определяет потерю полуволны луча 2 при отражении его от оптически более плотной среды,  $\alpha$  – угол падения луча.

Как видно из рис. 7.3.1 и формулы (7.3.1), наименьшая оптическая разность хода лучей соответствует углу падения  $\alpha = 90^\circ$ . Тогда условие интерференционного усиления лучей будет иметь вид:

$$2d \sin \alpha = \frac{\lambda}{2} \quad (7.3.2)$$

Наименьшая толщина пленки, при которой еще будет иметь место интерференционное усиление, соответствует первому порядку. Тогда из уравнения (7.3.2) получим:

$$2d \sin \alpha = \frac{\lambda}{2} \quad (7.3.3)$$

И наименьшая толщина пленки, при которой исчезнут все интерференционные максимумы, определится условием:

$$2d_{\min} \sin \alpha = \frac{\lambda}{2} \quad (7.3.4)$$

Из формулы (7.3.4) имеем:

$$d_{\min} \leq \frac{\lambda}{4 \sin \alpha}$$

Подставив в последнюю формулу числовые значения, получим:

$$d_{\text{мин.}} = 134 \sqrt{2} \text{ нм.}$$

Ответ:  $d_{\text{мин.}} = 134 \text{ нм.}$

### Пример 7.4

Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. После того как пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнили жидкостью, радиусы темных колец в отраженном свете уменьшились в 1,25 раза. Найти показатель преломления  $n$  жидкости.

Дано:  $r_{k0} / r_k = 1,25$ ;  $r_{k0}$  – первоначальный радиус  $k$ -го кольца,  $r_k$  – радиус этого же кольца с жидкостью.

Найти  $n = ?$

### Решение

Геометрическая разность хода когерентных лучей 1, 2 определяется двойной толщиной воздушного зазора между линзой и пластинкой  $d_k$ , (рис. 7.4.1), и связана с радиусом кривизны линзы  $R$  и радиусом интерференционного кольца  $r_{k0}$  выражением:

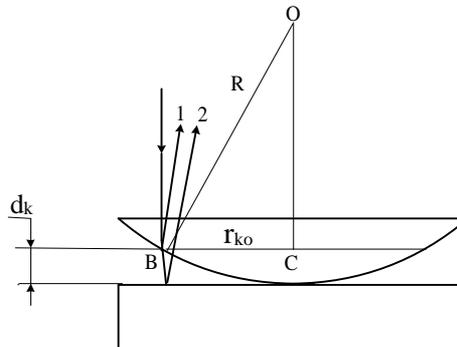


Рис. 7.4.1

$$d_k R = r_{k0}^2 / (2), \quad (7.4.1)$$

которое получается из прямоугольного треугольника ОВС, если пренебречь слагаемым  $d_k^2$ , как величиной второго порядка малости. Радиусы интерференционных колец определяются оптической разностью хода лучей  $\delta = 2d_k n + \lambda/2$ . Тогда для темных колец получаем условие:

$$2d_k n + \lambda/2 = (2k+1) \cdot \lambda/2.$$

После небольшого преобразования и с учетом уравнения (7.4.1) будем иметь для первоначальных размеров колец соотношение:

$$r_{k0}^2 n R = \lambda k. \quad (7.4.2)$$

Для колец, наблюдаемых в воздухе  $n = 1$  и  $r_k^2 R = \lambda k$  (7.4.3). Разделив почленно уравнения (7.4.1) и (7.4.2) получим:  $r_{k0}^2 / r_k^2 = n$ . Подставим данные условия задачи, получим:  $n = 1,25^2 = 1,56$ .

Ответ:  $n = 1,56$ .

## 8. Дифракция световых волн

В заданиях представлены задачи на применение метода зон Френеля и прохождения света через дифракционную решетку. В задачах первого типа строят зоны Френеля для плоской или сферической волны (в зависимости от условия задачи) и рассчитывают число зон Френеля, видимых из точки наблюдения. Если число зон Френеля четное, то в этой точке будет наблюдаться минимум освещенности, при нечетном числе – максимум, т.к. соседние зоны Френеля имеют разность хода  $\lambda/2$  и, следовательно, действуют в противофазе и гасят друг друга.

Второй тип задач представлен дифракцией Фраунгофера на одномерной и трехмерной (кристалл) дифракционной решетке и заключается в нахождении характеристик дифракционного спектра и дифракционной решетки: ширины спектра, линейной и угловой дисперсии, направлении дифракционных максимумов, разрешающей силы на основе уравнений, определяющих дифракционные явления на щели и решетке.

- Направления дифракционных минимумов на щели:

$$b \sin \theta = k \lambda$$

где  $b$  – ширина щели,  $k = 1, 2, 3, \dots$  – порядок дифракционного минимума.

- Направления дифракционных максимумов на щели:

$$b \sin \theta = k \lambda$$

- Уравнение Вульфа–Брэгга:

$$2d \sin \theta = J \lambda$$

где  $d$  – расстояние между атомными плоскостями кристалла;  $J$  – угол дифракции, под которым наблюдается дифракционный максимум от данной системы атомных плоскостей.

- Разрешающая сила  $R$  любого спектрального аппарата, в том числе дифракционной решетки:

$$R = N \lambda$$

где  $N$  – общее число щелей решетки;  $d\lambda$  – минимальная разность двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются раздельно в соответствии критерием Рэлея (две линии воспринимаются раздельно, если середина максимума одной линии приходится на край максимума соседней линии).

- Линейная дисперсия  $D_{\text{лин.}}$ :

$$D_{\text{лин.}} = \frac{dl}{d\lambda}$$

**Примечание [Н. П. 3]:** Может эти формулы убрать, т.к. на щели задач нет.

где  $dl$  – линейное расстояние на экране или фотопластинке между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на малую величину  $d\lambda$ .

- Угловая дисперсия решетки:

$$D = \frac{dj}{dlj} = \frac{k}{d \cdot \cos \theta},$$

где  $dj$  – угловое расстояние между линиями, отличающимися по длине волны на  $d\lambda$ .

- Угловая и линейная дисперсия дифракционной решетки связаны соотношением:

$$DFD = \frac{dl}{d\lambda},$$

где  $F$  – фокусное расстояние линзы, собирающей дифрагирующие лучи на экране, расположенном в ее фокальной плоскости.

### Пример 8.1

Экран находится на расстоянии  $L = 40$  м от точечного монохроматического источника света ( $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$  мм). На расстоянии  $a = 20$  м от источника света помещен экран с ирисовой диафрагмой. При каком радиусе отверстия диафрагмы центр дифракционного изображения отверстия будет: а) наиболее темным; б) наиболее светлым?

Дано:  $L = 40$  м;  $a = 20$  м;  $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$  мм =  $5 \cdot 10^{-7}$  м.

Найти: а)  $r_m = ?$  б)  $r_c = ?$

#### Решение

Для ответа на вопрос задачи необходимо определить число зон Френеля, открываемых диафрагмой. При четном числе зон центр дифракционного изображения будет темным, наиболее темным при  $k = 2$ , наиболее светлым – при нечетном числе зон Френеля равным 3. Для определения диаметра отверстия следует найти радиус произвольной зоны Френеля. Радиус  $k$ -ой зоны Френеля определим из рис. 8.1.1. Так как источник света точечный, то фронт волны есть сфера радиуса  $R = O_1C$ . Расстояние «источник – фронт волны» есть  $a$ , расстояние «фронт волны – точка наблюдения» обозначено через  $b$ . По условию задачи  $(a + b) = L$ .

Из  $\triangle O_1CD$  и  $\triangle DCO_2$  выразим  $r_k^2$  и приравняем, получим:

$$r_k^2 = a(b - r_k^2) = b^2 - 2br_k^2 + r_k^4 \quad (1)$$

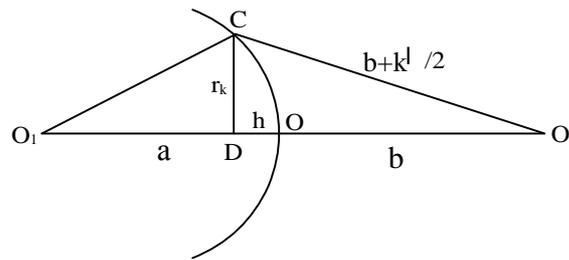


Рис. 8.1.1

Приравнивая правые части этих уравнений, определим  $h$ , затем подставим  $h$  в первое из этих уравнений и, пренебрегая величинами второго порядка малости (содержащими  $\lambda^2$ ), получим выражение для радиуса  $k$ -ой зоны Френеля:

$$r_k = \sqrt{\frac{kabk\lambda L}{abL}} \sqrt{() -}$$

Приравнивая радиус отверстия радиусу  $k$ -ой зоны Френеля для каждого случая и подставляя данные задачи, получим:

$$a) 110, r_m = \sqrt{\frac{220(4020)510}{40}}^{-7} \quad -^3 \text{ м}$$

$$б) 1,22 \lambda_c = \sqrt{\frac{320(4020)510}{40}}^{-7} \quad -^3 \text{ м}$$

Ответ:  $r_m = 1 \cdot 10^{-3}$  м;  $r_c = 1,22 \cdot 10^{-3}$  м.

### Пример 8.2

Какое наименьшее число штрихов должна содержать решётка, чтобы в спектре первого порядка можно было разделить две жёлтые линии натрия с длинами волн 589 нм и 589,6 нм? Какова длина такой решётки, если постоянная решётки 10 мкм?

Дано:  $k = 1$ ;  $\lambda_1 = 589$  нм =  $589 \cdot 10^{-9}$  м;  $\lambda_2 = 589,6$  нм =  $589,6 \cdot 10^{-9}$  м;  $d = 10$  мкм =  $10 \cdot 10^{-6}$  м.

Найти:  $L = ?$   $N_{\min} = ?$

#### Решение

Разрешающая сила дифракционной решетки  $R$  определяется уравнением

$$Rk = \frac{l}{dl}, \quad (8.2.1)$$

где  $k$  – порядок дифракции;  $dl$  – минимальная разность двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются отдельно. Из формулы (8.2.1) получим:

$$N_{\min} = \frac{l}{k \cdot dl}. \quad (8.2.2)$$

Длина решетки определится выражением:

$$L = N_{\min} \cdot d. \quad (8.2.3)$$

Подставляя числовые данные задачи в уравнения (8.2.2) и (8.2.3), получим:

$$N_{\text{мин.}} = \frac{589}{1(589,6589)} \cdot 982; 98210109,8210. \quad -63 \quad \text{м}$$

Ответ:  $N_{\text{мин.}} = 982$  штриха;  $L = 9,82 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 9,82 \text{ мм.}$

### Пример 8.3

Каков период  $d$  решётки, если при нормальном падении на неё лучей с длиной волны  $\lambda = 750 \text{ нм}$  на экране, отстоящем от решётки на расстоянии  $1 \text{ м}$ , максимумы первого порядка отстоят друг от друга на  $x = 30,3 \text{ см}$ ? Каково число штрихов на  $1 \text{ см}$  решётки? Какое количество максимумов даёт эта дифракционная решётка? Каков максимальный угол  $\varphi_{\text{max}}$  отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму?

Дано:  $\lambda = 750 \text{ нм} = 750 \cdot 10^9 \text{ м}$ ;  $L = 1 \text{ м}$ ;  $k = 1$ ;

$\Delta x = 30,3 \text{ см} = 30,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $l = 1 \text{ см} = 1 \cdot 10^2 \text{ м}$ ;

Найти:  $d = ?$   $N = ?$   $k_{\text{max}} = ?$   $\alpha_{\text{max}} = ?$

#### Решение

Максимумы первого порядка располагаются симметрично центральному максимуму (рис. 8.3.1). Тогда положение первого максимума относительно

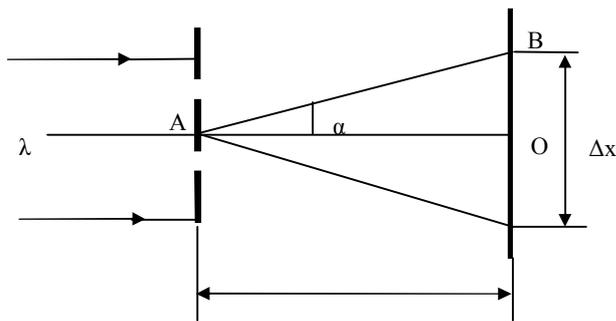


Рис. 8.3.1

центрального максимума равно половине расстояния между первыми максимумами. Из рисунка видно, что угол дифракции, соответствующий данному максимуму, определяется соотношением

$$\text{tg } \alpha = \frac{OB}{AO} = \frac{\Delta x / 2}{L} = 0,5 \cdot \frac{30,3}{100} = 0,1515$$

Период решетки найдем из уравнения, определяющего положения главных дифракционных максимумов для дифракционной решетки:

$$d \sin \alpha = k \lambda \quad (8.3.1)$$

Зная период решетки, можно определить число штрихов на длине  $l$ :

$$N = l/d \quad (8.3.2)$$

Порядок дифракции определяется из уравнения (8.3.1):

$$k\lambda = d \sin \varphi \quad (8.3.3)$$

Подставляя числовые значения в уравнения (8.3.1 – 8.3.3) получим:

$$N_0 = 1(5,0110)2000^4 \quad k_{\max.} = 5,01101(75010)6,76.$$

Для  $k_{\max.}$  мы взяли число 6, т.к. порядок дифракции по определению есть целое число. Тогда максимальный угол дифракции определим из уравнения (8.3.1):

$\alpha_{\max.} = \arcsin(k_{\max.} \lambda / d)$  Подставляя в последнее уравнение числовые данные, получим:  $\alpha_{\max.} = \arcsin(675010 / 5,0110) 63,9^\circ$ . Число штрихов на 1 см длины решетки  $N_0$  равно:  $N_0 = 1(5,0110)2000^4$ .

Ответ:  $d = 5,01 \cdot 10^{-6}$  м;  $N_0 = 2000$ ;  $k_{\max.} = 6$ ;  $\varphi_{\max.} = 63,9^\circ$ .

### Пример 8.4

Какое фокусное расстояние  $F$  должна иметь линза, проектирующая на экран спектр, полученный при помощи дифракционной решетки, чтобы расстояние между двумя линиями калия  $\lambda_1 = 404,4$  нм и  $\lambda_2 = 404,7$  нм в спектре первого порядка было равным 0,1 мм? Постоянная решетки  $d = 2$  мкм.

Дано:  $\lambda_1 = 404,4$  нм =  $404,4 \cdot 10^{-9}$  м;  $\lambda_2 = 404,7$  нм =  $404,7 \cdot 10^{-9}$  м;

$dl = 0,1$  мм =  $1 \cdot 10^{-4}$  м;  $d = 2$  мкм =  $2 \cdot 10^{-6}$  м;  $k = 1$ .

Найти:  $F = ?$

### Решение

Линейная и угловая дисперсии дифракционной решетки связаны соотношением:

$$D_{\text{лин.}} = D_{\text{угл.}} \cdot F \quad (8.4.1)$$

В свою очередь линейная и угловая дисперсии соответственно определяются выражениями:

$$D_{\text{лин.}} = dl/d\lambda \quad (8.4.2)$$

$$D_{\text{угл.}} = d\varphi/d\lambda = k / (d \cos \varphi) \quad (8.4.3)$$

где  $dl$  – линейное расстояние между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на  $d\lambda$ ;  $k$  – порядок дифракции;  $\varphi$  – угол, под которым наблюдается максимум, соответствующий спектральной линии с длиной волны  $\lambda$ . Этот угол определяется формулой

$$d \sin \varphi = k \lambda \quad (8.4.4)$$

Из формул (8.4.1–8.4.3) получим:

$$F = \frac{d \sin \theta_1 \cos \theta_2}{k \sin \theta_1} \quad (5)$$

Подставляя данные задачи в формулу (8.4.4), определим сначала угол дифракции, а затем из формулы (8.4.5) получим значение искомой величины:

$$j = \arcsin \left( \frac{d \sin \theta_1 \cos \theta_2}{k} \right) = \arcsin \left( \frac{140210 \cos(11,67^\circ)}{1(404,7404,4)10^{-9}} \right) = 0,653 \text{ м}$$

Ответ:  $F = 0,65 \text{ м}$ .

## 9. Поляризация световых волн

В данном разделе представлены задачи на применение закона Брюстера, двойного лучепреломления, закона Малюса, вращение плоскости поляризации оптически активными средами.

Для понимания сущности процессов поляризации и явления вращения плоскости поляризации следует учесть, что естественный свет можно представить как суперпозицию двух плоскополяризованных волн, плоскости поляризации которых, взаимно перпендикулярны, а интенсивности равны.

- Закон Брюстера:  $\tan i_B = n_2$ ,

где  $i_B$  – угол падения света из первой среды во вторую, при котором отраженный от первой среды свет оказывается полностью плоскополяризованным;  $n_{1,2}$  относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

- Закон Малюса:  $I = I_0 \cos^2 \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора;  $I_0$  – интенсивность света, прошедшего через анализатор,  $I_0 = I_{ест.} \cdot 1/2$ ,  $I_{ест.}$  – интенсивность естественного света, падающего на анализатор.

- Вращение плоскости поляризации оптически активным веществом:

а) твердые тела:  $j = \alpha \cdot d$ , где  $\alpha$  – постоянная вращения;  $d$  – толщина слоя вещества, через которое проходит плоскополяризованный свет;

б) химически чистые жидкости:  $j = [\alpha] \cdot d$ , где  $[\alpha]$  – удельное вращение,  $\rho$  – плотность жидкости;

в) раствор оптически активного вещества в оптически неактивном растворителе:  $j = [C] \cdot d$ , где  $C$  – концентрация раствора (масса растворенного вещества в единице объема раствора),  $d$  – длина столба жидкости.

- Разность фаз обыкновенной и необыкновенной волн равна:

$$\Delta \varphi = \frac{(n_e - n_o) \cdot d}{\lambda} \cdot 2\pi,$$

где  $n_{\text{об}}$  – соответственно показатель преломления необыкновенной и обыкновенной волн.

- Степень поляризации света определяется выражением

$$P = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}},$$

где  $I_{\text{max}}$  и  $I_{\text{min}}$  – максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

### Пример 9.1

Пучок естественного света падает на стеклянную ( $n = 1,6$ ) призму горизонтально ее основанию (рис. 9.1.1). Определить двугранный угол  $\alpha$  призмы, если отраженный пучок максимально поляризован.

*Дано:*  $n = 1,6$ ; отраженный луч максимально поляризован.

*Найти:*  $\alpha = ?$

#### Решение

Поскольку отраженный от грани призмы луч максимально поляризован, то угол  $\beta$  падения луча на грань призмы подчиняется закону Брюстера:  $\text{tg} \beta = \frac{n_2}{n_1}$ , где  $n_{1,2}$  – относительный показатель преломления луча. Решая это уравнение, имеем:

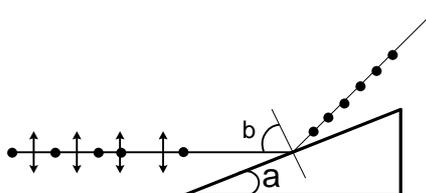


Рис. 9.1.1

$$\beta_B = \arctg n = \arctg(1,6) = 58,1^\circ$$

Из рисунка видно, что стороны углов  $\beta$  и  $\alpha$  взаимно перпендикулярны, следовательно, сумма этих углов в данном случае равна  $90^\circ$ . Отсюда получаем  $\alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$ .

*Ответ:*  $\alpha = 32^\circ$ .

### Пример 9.2

Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, поставленные так, что угол между их главными плоскостями равен  $\varphi$ . Как поляризатор, так и анализатор поглощают и отражают 8% падающего на них света. Оказалось, что интенсивность луча, вышедшего из анализатора, равна 9% интенсивности естественного света, падающего на поляризатор. Найти угол  $\varphi$ .

*Дано:*  $k = 8\% = 0,08$ ;  $I = 9\% \cdot I_{\text{ест.}} = 0,09 \cdot I_{\text{ест.}}$

*Найти:*  $\varphi = ?$

#### Решение

Для нахождения угла между плоскостями поляризации анализатора и поляризатора воспользуемся законом Малюса. При этом учтем, что при про-

хождении света через поляризатор отражается и поглощается  $k$ -тая доля естественного света, следовательно, интенсивность прошедшего через поляризатор света будет равна:

$$I_k = I_0(1-k)_{ест.} \quad (9.2.1)$$

При прохождении через анализатор теряется еще  $k$ -тая доля света, прошедшего через анализатор, а проходит  $(1-k)$  часть света. Тогда закон Малюса можно записать в виде:

$$I_0(1-k)(1-k)\cos^2 j \quad (9.2.2)$$

С учетом условия задачи уравнение (2) примет вид:

$$0,090 = I_0(1-k)\cos^2 j \quad (9.2.3)$$

Решая уравнение (3), получаем:

$$\cos j = \sqrt{0,090 / (1-k)}; \arccos(0,4611) = 62,5^\circ$$

Ответ:  $\varphi = 62,5^\circ$ .

### Пример 9.3

Раствор глюкозы с массовой концентрацией  $C_1 = 280 \text{ кг/м}^3$ , содержащийся в стеклянной трубке, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света, проходящего через этот раствор, на угол  $\varphi_1 = 32^\circ$ . Определить массовую концентрацию  $C_2$  глюкозы в другом растворе, налитом в трубку такой же длины, если он поворачивает плоскость поляризации на угол  $\varphi_2 = 24^\circ$ .

Дано:  $C_1 = 280 \text{ кг/м}^3$ ;  $\varphi_1 = 32^\circ$ ;  $\varphi_2 = 24^\circ$ .  $d_1 = d_2$ .

Найти:  $C_2$ .

#### Решение

Вращение плоскости поляризации в жидких оптически активных растворах определяется уравнением:

$$j = [\alpha] \cdot C \cdot d \quad (9.3.1)$$

где  $C$  – массовая концентрация раствора;  $[\alpha]$  – удельное вращение;  $d$  – длина пути света в растворе. Запишем уравнение (9.3.1) для 1-го и 2-го растворов:  $j_1 = [\alpha] \cdot C_1 \cdot d_1$ ;  $j_2 = [\alpha] \cdot C_2 \cdot d_2$ . Так как длина пути света в обоих растворах одинакова, то поделив почленно эти уравнения, получим для  $C_2$  выражение:

$$C_2 = j_2 / j_1 \cdot C_1 \quad (9.3.2)$$

Подставим числовые данные задачи в уравнение (9.3.2) получим:

$$C_2 = 210 \text{ кг/м}^3. \quad \text{Ответ: } C_2 = 210 \text{ кг/м}^3.$$

### Пример 9.4

Пластинку кварца толщиной  $d_1 = 2 \text{ мм}$ , вырезанную перпендикулярно оптической оси, поместили между параллельными николями, в результате чего

плоскость поляризации света повернулась на угол  $\varphi_1 = 53^\circ$ . Определить толщину  $d_2$  пластинки, при которой данный монохроматический свет не проходит через анализатор.

Дано:  $d_1 = 2$  мм;  $\varphi_1 = 53^\circ$ .

Найти:  $d_2 = ?$

### Решение

Так как пластинку вырезали перпендикулярно оптической оси, то луч света, проходя кристалл, испытывает двойное лучепреломление. При этом оба луча, обыкновенный и необыкновенный, идут в одном направлении и приобретают разность хода  $\delta$ , равную:  $\delta = d(n_o - n_e)$ . Ей соответствует изменение разности фаз и соответственно поворот плоскости поляризации на угол  $\varphi_1$ , равный:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \frac{d(n_o^2 - n_e^2)}{\lambda} \quad (9.4.1)$$

где  $n_o$  и  $n_e$  – соответственно абсолютные показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волны. Свет не будет проходить через анализатор, если кварцевая пластинка поворачивает плоскость поляризации на угол  $\varphi_2 = 90^\circ$ . Толщина пластинки, соответствующая такому углу поворота, определяется аналогичным уравнением

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} \frac{d_2(n_o^2 - n_e^2)}{\lambda} \quad (9.4.2)$$

Решая совместно уравнения (9.4.1) и (9.4.2), получаем для искомой толщины пластинки  $d_2$  выражение

$$d_2 = d_1 \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \quad (9.4.3)$$

Подставив числовые значения в формулу (9.4.3), получим:

$$d_2 = 2 \cdot \frac{90}{53} = 3,4 \text{ мм} \quad \text{Ответ: } d_2 = 3,4 \text{ мм.}$$

## 10. Дисперсия и поглощение световых волн

В данном разделе представлены задачи по следующим темам:

1. Поглощение света; применение законов Бугера и Бугера–Ламберта–Бера.
2. Классическая электронная теория дисперсии и поглощения света.
3. Групповая, фазовая скорости света.

### Основные формулы.

- Для однородной среды справедлив закон Бугера

$$I = I_0 e^{-kd}, \quad (10.1)$$

где  $I$  и  $I_0$  – соответственно интенсивность света на входе и выходе из вещества;  $d$  – толщина слоя вещества, через который проходит свет;  $k$  – коэффициент, зависящий от химической природы вещества, состояния поглощающей среды и длины волны света;  $e$  – основание натуральных логарифмов.

• В разбавленных растворах вещества в практически непоглощающем растворителе коэффициент поглощения  $k = bC$  и закон Бугера (в этом случае его называют законом Бугера–Ламберта–Бера) принимает вид

$$I = I_0 e^{-bCd}, \quad (10.2)$$

где  $C$  – концентрация раствора,  $b$  – коэффициент, не зависящий от концентрации и характерный для молекул поглощающего вещества.

• Абсолютный показатель преломления вещества  $n$  согласно классической электронной теории дисперсии вещества, состоящего из неполярных молекул, определяется выражением

$$n \approx 1 + \frac{ne_0^2}{2\epsilon_0 m} \sum_{i=1}^K \frac{f_i}{\omega_{oi}^2 - \omega^2} \quad (10.3)$$

где  $n_0$  – концентрация атомов или молекул;  $e$  и  $m$  – соответственно заряд и масса электрона;  $\omega_{oi}$  – собственная частота колебаний электронов в атомах  $i$ -го типа,  $\omega$  – частота света, проходящего через вещество;  $K$  – число атомов разного сорта в веществе,  $f_i$  – безразмерный коэффициент, зависящий от типа электрона, и определяющий вклад данного типа электронов в дисперсию и поглощение света.

• Фазовая скорость света  $v$  определяется выражениями:

$$v = \frac{c}{n} \quad (10.4)$$

где  $\omega$  – циклическая частота световой волны;  $k = 2\pi/\lambda$  – модуль волнового вектора,  $c$  – скорость света в вакууме;  $n$  – абсолютный показатель преломления вещества.

• Модуль групповой скорости световой волны, определяющей скорость переноса энергии волной, равен производной от циклической частоты  $\omega(k)$  по модулю волнового вектора  $k$ :

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (10.5)$$

• Связь между групповой и фазовой скоростями света определяется формулой Рэлея

$$u = \frac{1}{n} \frac{dv}{dl} = \frac{1}{n} \frac{d}{dl} \left( \frac{c}{n} \right) = -\frac{c}{n^2} \frac{dn}{dl} \quad (10.6)$$

Решение задач на поглощение света сводится к составлению уравнений на основе уравнения Бугера или Бугера–Ламберта–Бера и учета ослабления света вследствие отражения света на границе раздела сред с помощью коэффициента отражения, обычно задаваемого в условии задачи.

Решение задач по второй теме основано на использовании формулы (10.3) этого раздела. При этом следует учесть, что если вещество состоит из атомов одного сорта, а число оптических (валентных) электронов равно  $K$ , то можно полагать, что собственные частоты всех оптических электронов примерно одинаковы, одинаков также их вклад в дисперсию. В этом случае формула (10.3) упрощается:

$$n \approx 1 + \frac{ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{K}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (10.7)$$

При определении показателя преломления для рентгеновского излучения можно считать, что  $\omega \gg \omega_0$ , т.к. частота рентгеновского излучения на три порядка превышает частоту колебаний валентных электронов. В этом случае формула (10.7) примет вид:

$$n \approx 1 - \frac{ne^2 K}{2\epsilon_0 m \omega^2} \quad (10.8)$$

Заметим, что из формулы (10.8) следует, что показатель преломления для рентгеновских лучей меньше 1. Отметим также, что при наличии свободных электронов в веществе собственная частота колебаний  $\omega_0$  их равна 0 вследствие отсутствия «упругой» связи этих электронов с ионными остатками.

Решение задач 3-го типа основано на использовании определений фазовой и групповой скорости (4–6) и правил дифференцирования. При этом точное значение производной можно заменить ее приближенным значением, если заданы небольшие изменения показателя преломления и длины волны, например:

$$\frac{dv}{dl} \approx \frac{dv}{dn} \frac{dn}{dl} = \frac{dv}{dn} \frac{dn}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dl},$$

где фазовая скорость  $v = c/n$ .

### Пример 10.1

Коэффициент поглощения воды для излучения с длиной волны 0,77 мкм равен 0,0024 мм<sup>-1</sup>. На какой глубине монохроматический пучок лучей будет ослаблен в 2,7 раза? На сколько надо увеличить яркость падающего пучка, если нужно изменить толщину слоя воды с 1 до 5 см, без уменьшения яркости излучения, выходящего из водяного фильтра?

Дано:  $k = 0,0024 \text{ мм}^{-1}$ ;  $I_0/I = 2,7$ ;  $d_1 = 1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$ ;

$d_2 = 5 \text{ см} = 50 \text{ мм}$ ;  $I_1 = I_2$ .

Найти:  $d = ?$   $I_{02}/I_{01} = ?$

### Решение

Поглощение света в веществе описывается законом Бугера

$$I = I_0 e^{-kd}, \quad (10.1.1)$$

где  $I_0$  – интенсивность света, падающего на раствор;  $k$  – линейный коэффициент поглощения;  $d$  – толщина слоя вещества. Решая уравнение (10.1.1) относительно  $d$ , и подставляя числовые значения из условия задачи, получим

$$d = \frac{\ln(I_0/I)}{k} = \frac{\ln(2,7)}{0,0024} = 414 \text{ мм}.$$

Для ответа на 2-й вопрос запишем уравнение (10.1.1) для 1-го и 2-го слоя воды, получим:

$$I_1 = I_0 e^{-kd_1}, \quad I_2 = I_0 e^{-kd_2}. \quad (10.1.2)$$

Решая систему (2) с учетом условия  $I_1 = I_2$ , получим

$$\ln(0,0024 \cdot 10) = \ln(0,0024 \cdot 50).$$

Подставим числовые значения из условия задачи и, потенцируя, получим

$$\ln(0,0024 \cdot 10) = \ln(0,0024 \cdot 50) \quad \text{и} \quad I_{02}/I_{01} = 1,10.$$

Ответ:  $d = 414 \text{ мм}$ ; Интенсивность первичного пучка следует увеличить в 1,10 раза.

### Пример 10.2

Показатель преломления воздуха при нормальных условиях для желтой линии натрия ( $\lambda = 5893 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ )  $n_1 = 1,0002918$ . Определите показатель преломления  $n_2$  при температуре  $30^\circ \text{ С}$  и давлении  $3 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

Дано:  $\lambda = 5893 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ ;  $n_1 = 1,0002918$ ;

$t_1 = 0^\circ \text{ С} = 273 \text{ К}$ ;  $p_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ;

$t_2 = 30^\circ \text{ С} = 303 \text{ К}$ ;  $p_2 = 3 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

Найти:  $n_2 = ?$

### Решение

Поскольку показатель преломления воздуха для данной длины волны больше 1, то имеет место нормальная дисперсия, т.е.  $\omega_{0i} > \omega$ , где  $\omega_{0i}$  – собственная частота колебаний электронов в молекулах воздуха.

Следует также учесть, что воздух состоит из разных молекул, основными являются азот, кислород, водород. Поэтому показатель преломления воздуха при данных условиях определяется дисперсионной формулой

$$n = 1 + \frac{ne_0^2}{2\epsilon_0 m} \sum_{i=1}^l \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2} \quad (10.2.1)$$

где  $n_0$  – концентрация молекул воздуха;  $e$  – заряд электрона;  $m$  – масса электрона;  $\omega$  – частота света;  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная;  $\omega_{0i}$  – собственная частота колебаний электрона данного типа;  $f_i$  – безразмерный коэффициент, зависящий от типа электрона и определяющий вклад данного типа электронов в дисперсию и поглощение света.

При изменении температуры и давления воздуха, величины, стоящие под знаком суммы, не изменяются, поэтому обозначив сумму буквой  $C$ , формулу (10.2.1) можно записать в виде:

$$n = 1 + \frac{ne_0^2}{2\epsilon_0 m} C \quad (10.2.2)$$

Уравнение (10.2.2) запишем для двух состояний воздуха:

$$n_1 = 1 + \frac{ne_0^2}{2\epsilon_0 m} C_1 \quad \text{и} \quad n_2 = 1 + \frac{ne_0^2}{2\epsilon_0 m} C_2 \quad (10.2.3)$$

Концентрация молекул воздуха  $n_0$  прямо пропорциональна его плотности  $\rho$ :  $\frac{n_{01}}{n_{02}} = \frac{r_1}{r_2}$ .

Отношение  $r_1/r_2$  определим из системы уравнений Клапейрона – Менделеева

для двух состояний газа:  $\frac{p_1 r_1}{n_1 T_1} = \frac{p_2 r_2}{n_2 T_2}$  ;; — откуда:

$$\frac{r_{112} p T_2}{r_{212} p T_1} = \frac{n_{o1}}{n_{o2}} \quad (10.2.4)$$

Решая совместно систему уравнений (10.2.3 и 10.2.4), получим:

$$n_2 = \frac{n_1 r_1 T_1 T_2}{r_2 T_1 T_2} = 1 \quad (1) \quad (10.2.5)$$

Подставим числовые значения в (10.2.5):

$$n_2 = \frac{310273(1,00029181)}{11,007887 \cdot 110303}$$

Ответ:  $n_2 = 1,007887$ .

### Пример 10.3

Определить дисперсию вещества, фазовую и групповую скорости, если известно, что показатель преломления прозрачных веществ для небольших интервалов длин волн зависит от длины волны следующим образом:  $n_{AB} \propto 1/\lambda^2$ .

Дано:  $n_{AB} \propto 1/\lambda^2$ .

Найти:  $dn/d\lambda$ ,  $v$ ,  $u$  = ?

### Решение

Для решения задачи воспользуемся определением дисперсии вещества, фазовой скорости и формулой Релея для групповой скорости. Для дисперсии вещества  $dn/d\lambda$  по определению имеем

$$\frac{dn}{d\lambda} = -2n \frac{1}{\lambda^3}$$

Фазовая скорость  $v$  равна

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{AB \cdot 1/\lambda^2} = \frac{c \lambda^2}{AB}$$

Групповую скорость  $u$  определим из формулы Релея

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{c \lambda^2}{AB} - \lambda \left( \frac{2c \lambda}{AB} \right) = \frac{c \lambda^2}{AB} - \frac{2c \lambda^2}{AB} = -\frac{c \lambda^2}{AB}$$

Выполняя дифференцирование по  $\lambda$  и упрощая полученное выражение, получим для групповой скорости формулу

$$u = \frac{c \lambda^2}{AB} - \frac{2c \lambda^2}{AB} = -\frac{c \lambda^2}{AB}$$

## Задачи для самостоятельного решения

### Гармонические колебания

**301.** Тело совершает гармонические колебания по закону  $x=0,05\sin((p/3)\cdot t)$  м. Определить амплитуду силы и полную энергию тела, если его масса 200 г.

**302.** Закон изменения силы тока в колебательном контуре  $I= 0,05\sin(100\pi t)$  А. Емкость конденсатора 15 мкФ. Найти индуктивность контура, период колебаний, максимальную энергию электрического поля и закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора.

**303.** Однородный диск радиусом 30 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Каков период его колебаний.

**304.** Максимальное значение силы тока в колебательном контуре 1 мА. Частота колебаний равна 50 Гц, а индуктивность катушки 5 мГн. Определить разность потенциалов на обкладках конденсатора колебательного контура в тот момент, когда энергия электрического поля конденсатора в 2 раза больше энергии магнитного поля катушки.

**305.** Груз массой 1 кг подвешен на вертикальной пружине жесткостью 2500 Н/м. Какой будет амплитуда колебаний этого груза, если ему сообщили скорость 2 м/с, после того как отклонили от положения равновесия на 3 см.

**306.** В колебательном контуре индуктивность катушки равна 0,2 Гн, а амплитуда колебаний силы тока 40 мА. Найти энергию электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки в тот момент, когда мгновенное значение силы тока в два раза меньше амплитудного значения.

**307.** Уравнение движения точки дано в виде  $x = 0,2\sin((p/2)t + p/4)$  (м). Найти период колебаний, максимальную скорость и максимальное ускорение точки.

**308.** Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью, равной 0,2 Гн, и конденсатора емкостью 10 мкФ. В момент, когда напряжение на конденсаторе равно 1 В, ток в контуре равен 10 мА. Определить максимальное значение силы тока в контуре.

**309.** Тело совершает гармонические колебания с периодом 1,5 с, а максимальное ускорение тела составляет 5 см/с<sup>2</sup>. Определить скорость колеблющегося тела в тот момент, когда кинетическая энергия тела равна его потенциальной энергии.

**310.** Тонкий однородный стержень длины  $l$  совершает гармонические колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку, находящейся на расстоянии  $d = l/4$  от его середины. Период таких колебаний равен 2 с. Чему будет равен период его колебаний вокруг горизонтальной оси, проходящей через край стержня.

### Сложение колебаний

**311.** Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемых уравнениями  $x_1 = 3\cos(2pt + p/4)$  см и  $x_2 = 5\cos(2pt + p/2)$  см. Определить для результирующего колебания амплитуду, начальную фазу. Записать уравнение результирующего колебания.

**312.** Разность фаз одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода  $T = 4$  с и одинаковой амплитуды  $A = 5$  см составляет  $p/4$ . Записать уравнение результирующего колебания, если начальная фаза одного из них равна нулю.

**313.** Амплитуда результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний одного направления одинаковой частоты, обладающих разностью фаз  $60^\circ$ , равна  $A = 6$  см. Определить амплитуду  $A_2$  второго колебания, если  $A_1 = 5$  см.

**314.** Найти уравнения траектории частицы, если ее уравнения движения имеют вид:  $x = 5\cos(\frac{w}{2}t)$ ,  $y = 5\cos(\omega t)$ .

**315.** Частица принимает участие одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения движения которых имеют вид:  $x = A\cos(\omega t + a)$ ,  $y = B\sin(\omega t + a)$ , где  $A = 3$  см,  $B = 8$  см. Найти уравнение траектории частицы.

**316.** Частица принимает участие одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения движения которых имеют вид:  $x = 2\sin(\omega t)$ ,  $y = 2\sin(2\omega t)$ . Найти уравнения траектории частицы.

**317.** Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемых уравнениями  $x_1 = 3\cos(pt + p/6)$  см и  $x_2 = 4\cos(pt + p/3)$  см. Определить для результирующего колебания амплитуду  $A$ , начальную фазу  $a$ . Записать уравнение результирующего колебания.

**318.** Частица принимает участие одновременно в трех гармонических колебаниях, происходящих вдоль одного направления по законам:  $x_1 = 2\cos(\omega t)$  см,  $x_2 = 4\cos(\omega t + p/4)$  см,  $x_3 = 2\cos(\omega t + p/2)$  см. Определить графическим методом амплитуду и начальную фазу результирующего колебания.

**319.** Частица принимает участие одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения движения которых имеют вид:  $x = A\cos(\omega t)$ ,  $y = B\cos(\omega t + p/2)$ , где  $A = 5$  см,  $B = 2$  см. Найти уравнение траектории частицы.

**320.** Частица принимает участие одновременно в трех гармонических колебаниях, происходящих вдоль одного направления по законам:  $x_1 = b\cos(\omega t)$  см,  $x_2 = 4\cos(\omega t + p/2)$  см,  $x_3 = 2\cos(\omega t + p)$  см. Определить графическим методом амплитуду и начальную фазу результирующего колебания.

### Затухающие колебания

**321.** Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 250 мкФ, катушки с индуктивностью 2 мГн и сопротивления 5 Ом. Во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за один период колебаний.

**322.** Тело массой 2 г совершает затухающие колебания. В течение времени 30 с тело потеряло 80% своей энергии. Определить коэффициент сопротивления.

**323.** Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 1 мкФ, катушки с индуктивностью 1,6 мГн, сопротивление которой равно 32 Ом. Определить время  $t$  и число полных колебаний  $N$ , по истечении которых амплитуда тока в контуре уменьшается в 10 раз.

**324.** Начальная амплитуда затухающих колебаний маятника равна  $A_0 = 6$  см. По истечении времени  $t_1 = 10$  с амплитуда равна  $A_1 = 2$  см. Определите, через какое время  $t_2$  амплитуда колебаний маятника станет равной  $A_2 = 6$  мм.

**325.** За время, в течение которого маятник совершает 100 колебаний, амплитуда уменьшилась в 3 раза. Определить добротность колебательной системы.

**326.** Груз массой  $m = 100$  г на пружине с коэффициентом упругости  $k = 0,2$  кг/м совершает малые колебания в среде, в которой коэффициент затухания  $b = 0,5$  с<sup>-1</sup>. Определить время  $t$  и число полных колебаний  $N$ , по истечении которых энергия маятника уменьшается в  $e$  раз.

**327.** Определить число полных колебаний системы, в течение которых энергия уменьшилась в 10 раз. Логарифмический декремент колебаний 0,01.

**328.** Частота затухающих колебаний в колебательном контуре с добротностью 2500 равна 250 кГц. Определить время, за которое амплитуда тока уменьшится в 4 раза.

**329.** Энергия затухающих колебаний маятника за 30 секунд уменьшается в три раза. Определите, во сколько раз она уменьшится за 2 минуты.

**330.** Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C = 5$  мкФ и катушки длиной  $l = 40$  см, радиусом  $r = 3$  см из проволоки диаметром  $d = 2$  мм. Сопротивление катушки равно  $R = 100$  Ом. Найти логарифмический декремент затухания контура  $I$ .

### Переменный ток

**331.** В цепь переменного тока включены последовательно емкость  $C$ , сопротивление  $R$  и катушка индуктивности  $L$ . Амплитуда переменного напряжения  $U_m = 220$  В. Найти амплитуду падения напряжения на конденса-

торе  $U_{Cm}$ , если известно, что амплитуда падения напряжения сопротивлению равна  $U_{Rm} = 2 \cdot U_{Cm}$ , а на индуктивности  $U_{Lm} = 5 \cdot U_{Cm}$ .

**332.** Катушка длиной 10 см и площадью поперечного сечения  $4 \text{ см}^2$  включена в цепь переменного тока частотой 50 Гц. Число витков катушки 500. Найти сопротивление катушки  $R$ , если сдвиг фаз между напряжением и током  $60^\circ$ .

**333.** В цепь переменного тока включены последовательно конденсатор емкостью  $C = 0,5 \text{ мкФ}$  и резистор сопротивлением  $R = 2,5 \text{ кОм}$ . При какой частоте  $\nu$  переменного тока полное сопротивление  $Z$  в два раза больше его активного сопротивления  $R$ ?

**334.** Последовательно соединенные конденсатор и резистор с сопротивлением  $R = 110 \text{ Ом}$  подключены к внешнему напряжению с амплитудным значением  $U_m = 110 \text{ В}$ . Определить сдвиг фаз между приложенным внешним напряжением и изменением тока в цепи, если амплитуда силы тока составляет  $I_m = 0,5 \text{ А}$ .

**335.** Конденсатор емкостью  $C = 1 \text{ мкФ}$  и резистор с сопротивлением  $R = 3 \text{ кОм}$  включены в цепь переменного тока частотой  $\nu = 50 \text{ Гц}$ . Найти полное сопротивление  $Z$  цепи, если конденсатор и резистор включены: а) последовательно; б) параллельно.

**336.** В цепь переменного тока частотой 50 Гц включены последовательно сопротивление  $R = 2 \text{ кОм}$  и катушка индуктивности  $L$ . Определить индуктивность катушки  $L$ , если полное сопротивление  $Z$  цепи составляет 5 кОм.

**337.** В цепь колебательного контура, состоящего из последовательно соединенных конденсатора емкостью  $C = 5 \text{ мкФ}$ , резистора с сопротивлением  $R = 2 \text{ кОм}$  и катушки с индуктивностью 2 мГн, подключено переменное внешнее напряжение  $U = 220 \cos 100\pi t$ , В. Определить амплитуду силы тока  $I_m$ , сдвиг фаз между приложенным внешним напряжением и изменением тока в цепи  $a$  и полное сопротивление цепи  $Z$ .

**338.** В цепь переменного тока включены последовательно емкость  $C$ , сопротивление  $R$  и катушка индуктивности  $L$ . Амплитуда переменного напряжения  $U_m = 220 \text{ В}$ . Найти амплитуду падения напряжения на конденсаторе  $U_{Cm}$ , сопротивлении  $U_{Rm}$  и на индуктивности  $U_{Lm}$ , если известно, что внешнее напряжение опережает ток по фазе на  $30^\circ$ , а  $U_{Lm} = 4 \cdot U_{Cm}$ .

**339.** Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью  $L = 5 \text{ мГн}$  и резистора сопротивлением  $R = 500 \text{ Ом}$ . При какой частоте  $\nu$  переменного тока полное сопротивление  $Z$  в два раза больше его активного сопротивления  $R$ ?

**340.** В цепь переменного тока включены последовательно емкость  $C$ , сопротивление  $R$  и катушка индуктивности  $L$ . Амплитуда переменного напряжения  $U_m = 220 \text{ В}$ . Определить амплитудные значения напряжений  $U_{Cm}$ ,  $U_{Rm}$  и  $U_{Lm}$ , если сдвиг фаз между током и напряжением равен  $45^\circ$ , а  $U_{Cm} = 3 \cdot U_{Lm}$ .

## Волны

**341.** Упругая волна распространяется вдоль оси  $x$  со скоростью  $u = 10$  м/с. Частота колебаний частиц среды равна  $\nu = 0,5$  Гц, амплитуда  $A = 4$  см. Определить длину волны  $\lambda$ , смещение  $x$ , скорость  $\frac{dx}{dt}$  и ускорение  $\frac{d^2x}{dt^2}$  точки, находящейся от источника колебаний на расстоянии  $x = 5$  м в момент времени  $t = 1,5$  с.

**342.** Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и плоского конденсатора, настроен на длину волны  $\lambda = 942$  м. Расстояние между пластинами конденсатора  $d = 8,85$  мм, диэлектрическая проницаемость вещества, заполнившего пространство между пластинами,  $\epsilon = 4$ . Площадь каждой пластины  $S = 10$  см<sup>2</sup>. Скорость света в вакууме равна  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Определить индуктивность катушки  $L$ .

**343.** Плоская волна распространяется вдоль оси  $x$  со скоростью  $u = 10$  м/с. Амплитуда колебаний частиц среды равна  $A = 3$  см. Две точки, находящиеся от источника колебаний на расстояниях  $x_1 = 6$  м и  $x_2 = 8$  м, колеблются с разностью фаз  $\Delta\varphi = \pi/3$ . Определить длину волны  $\lambda$  и смещение  $x$  данных точек в момент времени  $t = 2$  с.

**344.** Упругая волна распространяется вдоль оси  $x$  со скоростью  $u = 20$  м/с. Максимальная скорость колебаний частиц равна  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\max} = 10$  см/с, максимальное ускорение  $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{\max} = 80$  см/с<sup>2</sup>. Определить длину волны  $\lambda$ .

**345.** Определить длину электромагнитной волны  $\lambda$  в вакууме, на которую настроен идеальный колебательный контур, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора равна  $U_{cm} = 40$  В, а максимальное значение силы тока в контуре  $I_m = 5$  мА. Емкость конденсатора  $C = 1,5$  мкФ. Скорость света в вакууме равна  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

**346.** Звуковые колебания, имеющие частоту  $\nu = 400$  Гц и амплитуду  $A = 0,5$  мм, распространяются в воздухе. Длина волны  $\lambda = 60$  см. Найти скорость распространения волн  $u$ , максимальную скорость  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\max}$  и максимальное ускорение  $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{\max}$  колебаний частиц воздуха.

**347.** Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C = 0,5$  мкФ и катушки длиной  $l = 15$  см радиусом  $r = 1$  см из проволоки диаметром  $d = 2$

мм. Определить длину электромагнитной волны  $l$  в вакууме, на которую настроен колебательный контур. Скорость света в вакууме равна  $u = 3 \cdot 10^8$  м/с.

**348.** Упругая волна распространяется вдоль оси  $x$  со скоростью  $u = 20$  м/с. Период колебаний частиц среды равен  $T = 2$  с, амплитуда  $A = 0,5$  см. Определить длину волны  $l$ , смещение  $x$ , скорость  $\frac{dx}{dt}$  и ускорение  $\frac{d^2x}{dt^2}$  точки, находящейся от источника колебаний на расстоянии  $x = 5$  м в момент времени  $t = 0,5$  с.

**349.** Идеальный колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и плоского конденсатора, настроен на длину волны  $l = 1884$  м. Определить максимальный заряд на обкладках конденсатора, если максимальное значение силы тока в контуре  $I_m = 2$  мА. Скорость света в вакууме равна  $u = 3 \cdot 10^8$  м/с.

**350.** Плоская волна распространяется вдоль оси  $x$  со скоростью  $u = 5$  м/с. Амплитуда колебаний частиц среды равна  $A = 4$  см. Две точки, находящиеся от источника колебаний на расстоянии  $x_1 = 7$  м и  $x_2 = 10$  м, колеблются с разностью фаз  $\Delta\varphi = 65^\circ$ . Определить длину волны  $l$  и смещение  $x$  данных точек в момент времени  $t = 4$  с.

### Геометрическая оптика

**357.** Наблюдатель находится в воде на глубине 40 см. Он видит, что над ним висит лампа, расстояние до которой, по его наблюдениям, равно 2,4 м. Определите истинное расстояние от поверхности воды до лампы.

**358.** Матовая электрическая лампочка в виде шара диаметра 6 см освещает глобус диаметра 26 см. Определите диаметры полной тени и полутени глобуса на стене. Расстояние от глобуса до лампочки 1 м, до стены 2 м.

**359.** Изображение предмета в вогнутом зеркале увеличено в 3 раза. После того как предмет отодвинули от зеркала на 80 см, его изображение стало в 2 раза меньше предмета. Найдите фокусное расстояние зеркала.

**360.** Предельный угол полного отражения для некоторого вещества оказался равным  $30^\circ$ . Найти показатель преломления этого вещества.

**323.** Определить показатель преломления стекла, из которого изготовлена собирающая линза с радиусами кривизны поверхностей 20 см, если действительное изображение предмета, расположенного в 25 см от линзы, получилось на расстоянии 1 м от нее.

**324.** Источник света находится на расстоянии 1,5 м от экрана, на котором с помощью собирающей линзы получают увеличенное изображение источника. Затем экран отодвигают еще на 3 м и снова получают увеличенное изображение источника. Чему равны фокусное расстояние линзы и размеры

источника, если размер изображения в первом случае 18 мм, а во втором 96 мм?

**361.** Расстояние между электрической лампочкой и экраном 1 м. При каких положениях собирающей линзы с фокусным расстоянием 21 см изображение нити лампочки будет отчетливым? Можно ли при этом расстоянии получить четкое изображение предмета, если взять линзу с фокусным расстоянием в 26 см?

**362.** Две тонкие выпуклые линзы расположены на общей оси так, что центр одной лежит в фокусе другой. На двойном фокусном расстоянии от левой линзы расположен предмет. Где будет находиться его изображение? Каково поперечное увеличение системы? Оптическая сила каждой линзы  $D$ .

**363.** Имеются две тонкие симметричные линзы: одна собирающая с показателем преломления  $n_1 = 1,70$ , другая рассеивающая с  $n_2 = 1,51$ . Обе линзы имеют одинаковый радиус кривизны поверхностей  $R = 10$  см. Линзы сложили вплотную и погрузили в воду. Каково фокусное расстояние этой системы в воде?

**364.** Двояковыпуклая линза, ограниченная сферическими поверхностями одинакового радиуса кривизны в 12 см, поставлена на такое расстояние от предмета, что изображение на экране получилось в  $k$  раз больше предмета. Определить расстояние от предмета до экрана, если: 1)  $k = 1$ ; 2)  $k = 20$  и 3)  $k = 0,2$ . Показатель преломления материала линзы 1,5.

### Интерференция световых волн

**361.** В установке Юнга расстояние между щелями 1,5 мм, экран расположен на расстоянии 2 м от щелей. Щели освещаются источником с красным светофильтром ( $\lambda = 687$  нм). Определить расстояние между интерференционными полосами на экране. Как изменится расстояние между полосами, если заменить красный светофильтр зеленым ( $\lambda = 527$  нм)?

**362.** На пути световой волны, идущей в воздухе, поставили стеклянную пластинку толщиной  $h = 1$  мм. На сколько изменится оптическая длина пути, если волна падает на пластинку: 1) нормально; 2) под углом  $\alpha = 30^\circ$ ?

**363.** На тонкую пленку воды под углом  $\alpha = 52^\circ$  падает параллельный пучок белого света. При какой толщине пленки зеркально отраженный свет окрашен в желтый свет ( $\lambda = 0,60$  мкм) наиболее сильно?

**364.** В оба пучка света интерферометра Майкельсона поместили цилиндрические трубки длиной 10 см каждая, закрытые с торцов прозрачными плоскопараллельными пластинками. Вначале из трубок был выкачан воздух, потом в одну из них впустили водород, и интерференционная картина сместилась на 47,5 полос. Каков показатель преломления водорода? Опыт

проводился в свете с длиной волны 590 нм.

**365.** В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом ( $\lambda = 600$  нм). Расстояние между отверстиями  $d = 1$  мм, расстояние от отверстий до экрана  $L = 3$  м. Найти положение трех первых светлых полос.

**366.** В опыте с зеркалами Френеля расстояние между мнимыми изображениями источника света  $d = 0,5$  мм, расстояние до экрана  $L = 5$  м. В зеленом свете получились интерференционные полосы, расположенные на расстоянии 5 мм друг от друга. Найти длину волны зеленого света.

**367.** Мыльная пленка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. При наблюдении интерференционных полос в отраженном свете ртутной дуги ( $\lambda = 546,1$  нм) оказалось, что расстояние между пятью полосами равно 2 см. Найти угол клина в секундах. Свет падает перпендикулярно к поверхности пленки. Показатель преломления мыльной воды  $n = 1,33$ .

**368.** Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы двух соседних темных колец равны  $r_k = 4,0$  мм и  $r_{k+1} = 4,38$  мм. Радиус кривизны линзы  $R = 6,4$  м. Найти порядковые номера колец и длину волны падающего света.

**369.** Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в отраженном свете. Расстояние между вторым и двадцатым темными кольцами 4,8 мм. Найти расстояние между третьим и шестнадцатым темными кольцами Ньютона. Как изменится это расстояние, если пространство между линзой и пластинкой заполнить жидкостью с показателем преломления бóльшим, чем у линзы и пластинки?

**370.** Установка для получения колец Ньютона освещается светом с длиной волны  $\lambda = 589$  нм, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы  $R = 10$  м. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью. Найти показатель преломления  $n$  жидкости, если радиус третьего светлого кольца в проходящем свете  $r_3 = 3,65$  мм.

### Дифракция световых волн

**371.** Дифракционная решетка содержит 400 штрихов на 1 мм. На решетку падает монохроматический красный свет с длиной волны 650 нм. Под каким углом виден первый максимум? Сколько всего максимумов дает эта решетка?

**372.** Дифракционная картина наблюдается на расстоянии  $L = 4$  м от точечного источника монохроматического света ( $\lambda = 500$  нм). Посередине между экраном и источником света помещена диафрагма с круглым отверстием. При

каком радиусе  $R$  отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным?

**373.** На диафрагму с диаметром отверстия  $D = 1,96$  мм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ( $\lambda = 600$  нм). При каком наибольшем расстоянии между диафрагмой и экраном в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно?

**374.** Свет с длиной волны 530 нм падает на решетку, период которой равен 1,50 мкм, а общая длина 12,0 мм. Определить угловую ширину главного максимума и разрешающую способность решетки. Какова должна быть длина дифракционной решетки с периодом 300 штрихов на 1 мм, чтобы разрешить две спектральные линии с длинами волн 600,000 нм и 600,050 нм в спектре второго порядка? В спектре наивысшего порядка?

**375.** Период дифракционной решетки 0,01 мм, общее число штрихов равно 990. Увидим ли мы раздельно в спектре первого порядка обе компоненты дублета желтой линии натрия с длинами волн 5890 А и 5896 А? Каково угловое расстояние между этими максимумами в спектре второго порядка?

**376.** На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Красная линия ( $\lambda_1 = 630$  нм) видна в спектре третьего порядка под углом  $\varphi = 60^\circ$ . Какая спектральная линия  $\lambda_2$  видна под этим же углом в спектре четвертого порядка? Какое число штрихов  $N_0$  на единицу длины имеет дифракционная решетка? Найти угловую дисперсию  $d\varphi/d\lambda$  этой решетки для длины волны  $\lambda_1 = 630$  нм в спектре третьего порядка.

**377.** На грань кристалла каменной соли под углом скольжения  $31^\circ 3'$  падает параллельный пучок рентгеновских лучей с длиной волны 0,147 нм. Определить расстояние между атомными плоскостями в кристалле, если при этом угле скольжения наблюдается дифракционный максимум второго порядка. Каков максимальный порядок дифракции от данной грани кристалла?

**378.** На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Натриевая линия ( $\lambda = 589$  нм) дает в спектре первого порядка угол дифракции  $\varphi_1 = 17^\circ 8'$ . Некоторая линия дает в спектре второго порядка угол дифракции  $\varphi_2 = 24^\circ 12'$ . Найти длину волны этой линии и число штрихов  $N_0$  на единицу длины решетки.

**379.** Зрительная труба гониометра с дифракционной решеткой поставлена под углом  $\varphi = 20^\circ$  к оси коллиматора. При этом в поле зрения трубы видна красная линия спектра гелия ( $\lambda_{кр.} = 668$  нм). Какова постоянная  $d$  дифракционной решетки, если под тем же углом видна и синяя линия ( $\lambda_c = 447$  нм) более высокого порядка? Наибольший порядок спектра, который можно наблюдать при помощи решетки, равен 5. Свет падает на решетку нормально.

**380.** На каком расстоянии друг от друга будут находиться на экране две

линии ртутной дуги ( $\lambda_1 = 577$  нм и  $\lambda_2 = 579,1$  нм) в спектре первого порядка, полученном при помощи дифракционной решетки? Фокусное расстояние линзы, проектирующей спектр на экран,  $f = 0,6$  м. Постоянная решетки  $d = 2$  мкм.

### Поляризация световых волн

**381.** На систему, состоящую из двух поляроидов, у которых угол между оптическими осями составляет  $45^\circ$ , падает естественный свет. Во сколько раз уменьшится интенсивность светового пучка? Потери света в каждом поляроиде составляют 10%. Потери на отражение света пренебречь.

**382.** Если между двумя скрещенными поляроидами поместить третий, оптическая ось которого составляет угол  $\alpha$  с оптической осью анализатора, то поле зрения просветлеет. Найти интенсивность прошедшего света. Потери света на отражение и поглощение пренебречь. При каком угле  $\alpha$  просветление максимальное?

**383.** Определить толщину пластинки из кальцита, которая в желтом свете с длиной волны 589,3 нм создаст сдвиг фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами, равный  $\pi/2$  (пластинка в четверть волны). Какой сдвиг фаз возникнет при этом в фиолетовом свете (404,7 нм), проходящем через эту же пластинку? Разность показателей преломления ( $n_o - n_e$ ) для кальцита в видимой области спектра принять равной 0,172.

**384.** Раствор глюкозы с массовой концентрацией  $2,8 \cdot 10^2$  кг/м<sup>3</sup>, налитый в стеклянную трубку, поворачивает плоскость поляризации света, проходящего через раствор, на угол  $64^\circ$ . Другой раствор, налитый в эту же трубку, вращает плоскость поляризации на  $48^\circ$ . Найти концентрацию второго раствора.

**385.** Пучок естественного света, идущий в воде, отражается от грани алмаза, погруженного в воду. При каком угле падения отраженный свет полностью поляризован?

**386.** Угол  $\phi$  поворота плоскости поляризации желтого света натрия при прохождении через трубку с раствором сахара равен  $40^\circ$ . Длина трубки  $L = 15$  см. Удельное вращение  $\alpha$  сахара равно  $1,17 \cdot 10^{-2}$  рад $\cdot$ м<sup>-3</sup>/(м $\cdot$ кг). Определить плотность  $\rho$  раствора.

**387.** Луч света проходит через жидкость, налитую в стеклянный сосуд ( $n = 1,5$ ), и отражается от дна. Отраженный луч полностью поляризован при падении его на дно сосуда под углом  $42^\circ 37'$ . Найти показатель преломления жидкости.

**388.** Предельный угол полного внутреннего отражения пучка света на границе жидкости с воздухом равен  $43^\circ$ . Определить угол Брюстера для падения луча из воздуха на поверхность этой жидкости.

**389.** Во сколько раз ослабляется интенсивность света, проходящего через

два николя, плоскости пропускания которых образуют угол  $\alpha = 30^\circ$ , если в каждом из николей в отдельности теряется 10 % интенсивности падающего на него света?

**390.** На николь падает пучок частично-поляризованного света. При некотором положении николя интенсивность света, прошедшего через него, стала минимальной. Когда плоскость поляризации николя повернули на угол  $\beta = 45^\circ$ , интенсивность света возросла в  $k = 1,5$  раза. Определить степень поляризации  $P$  света.

### Дисперсия и поглощение света

**391.** Из одного и того же вещества изготовили две пластинки толщиной 3,8 мм и 9,0 мм. Пластинки поочередно вводят в узкий пучок монохроматического света и наблюдают, что первая пластинка пропускает 0,84 светового потока, вторая – 0,70. Определить коэффициент поглощения и толщину слоя половинного поглощения этого вещества. Вторичными отражениями света пренебречь.

**392.** Прозрачная пластинка пропускает половину падающего на нее светового потока. Определить коэффициент поглощения, если толщина пластинки  $d = 4,2$  см. Рассеянием пренебречь. Считать, что 10% падающего потока отражается от поверхности пластинки.

**393.** В 4%-ном растворе вещества в прозрачном растворителе интенсивность света на глубине  $d_1 = 20$  мм ослабляется в 2 раза. Во сколько раз ослабляется интенсивность света на глубине  $d_2 = 30$  мм в 8%-ном растворе того же вещества?

**394.** При прохождении через пластинку свет длиной волны  $\lambda_1$  ослабляется в результате поглощения в  $N_1$  раз, а свет длиной волны  $\lambda_2$  –  $N_2$  раз. Определить коэффициент поглощения для света с длиной волны  $\lambda_2$ , если коэффициент поглощения для  $\lambda_1$  равен  $k_1$ .

**395.** Для достаточно жестких рентгеновских лучей можно пренебречь энергией связи электронов вещества с решеткой и считать валентные электроны свободными. Вычислить в этом приближении показатель преломления алюминия для рентгеновских лучей с длиной волны  $0,50 \cdot 10^{-10}$  м.

**396.** Насыщающие пары бензола ( $C_6H_6$ ) для света, длина волны которого  $\lambda = 5893 \cdot 10^{-10}$  м (желтая линия натрия), при температуре  $40^\circ C$  и давлении 7,6 мм рт. ст. имеют показатель преломления  $n_1 = 1,001812$ . Чему равен показатель преломления этого газа при температуре  $400^\circ C$  и давлении 60,6 мм рт. ст.?

**397.** Найти зависимость между групповой и фазовой скоростями для следующих законов дисперсии: 1)  $v = a/(\lambda)^{1/2}$ ; 2)  $v = b \cdot k$ , где  $a$  и  $b$  – константы,  $\lambda$  и  $k$  – соответственно длина волны и волновое число.

**398.** Исходя из определения групповой скорости света  $u$ , получить формулу Рэлея:  $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$ . Показать также, что  $u$  вблизи  $\lambda = \lambda'$  равна отрезку  $v'$ , отсекаемому касательной к кривой  $v(\lambda)$  в точке  $\lambda'$  (рис.398.1).

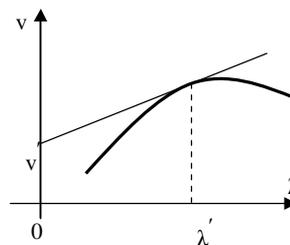


Рис. 398.1

**399.** Показатель преломления воды при  $\lambda_1 = 441$  нм равен  $n_1 = 1,341$ , а при  $\lambda_2 = 589$  нм равен  $n_2 = 1,334$ . Определить средние значения фазовой и групповой скоростей света в воде для синей области спектра (средней между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ).

**400.** Показатель преломления воды в интервале длин волн от 546 до 589 нм меняется от 1,33447 до 1,33300. Определите среднюю фазовую и среднюю групповую скорости света для этого интервала длин волн.

## Оглавление

Введение .....	3
Общие методические указания .....	4
Рабочая программа раздела «Колебания и волны. Волновая оптика» .....	6
<b>I. Колебания и волны. Волновая оптика .....</b>	<b>8</b>
1. Механические колебания .....	8
Контрольные вопросы по теме «Механические колебания» .....	33
2. Электромагнитные колебания .....	34
Контрольные вопросы по теме «Электромагнитные колебания» .....	50
3. Волны .....	52
Контрольные вопросы по теме «Волны» .....	57
4. Геометрическая оптика .....	58
Контрольные вопросы по теме «Геометрическая оптика» .....	63
5. Интерференция световых волн .....	64
Контрольные вопросы по теме «Интерференция световых волн» .....	74
6. Дифракция световых волн .....	74
Контрольные вопросы по теме «Дифракция световых волн» .....	90
7. Поляризация световых волн .....	91
Контрольные вопросы по теме «Поляризация световых волн» .....	99
8. Дисперсия и поглощение света .....	99
Контрольные вопросы по теме «Дисперсия и поглощение световых волн» .....	105
<b>II. Примеры решения задач .....</b>	<b>107</b>
1. Гармонические колебания .....	107
2. Сложение колебаний .....	113
3. Затухающие колебания .....	117
4. Переменный ток .....	124
5. Механические и электромагнитные волны .....	128
6. Геометрическая оптика .....	133
7. Интерференция световых волн .....	141
8. Дифракция световых волн .....	146
9. Поляризация световых волн .....	151
10. Дисперсия и поглощение световых волн .....	154
<b>III. Задачи для самостоятельного решения.....</b>	<b>160</b>
<b>Оглавление .....</b>	<b>172</b>

Учебное издание

Дымченко Николай Павлович  
Терлецкий Игорь Анатольевич

Физика  
Часть 3  
Колебания и волны. Волновая оптика

Редактор В.В. Сизова  
Технический редактор Н.М. Белохонова

Подписано в печать . Формат 60 x 84 x /16  
Усл. печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 7,12  
Тираж 100 экз. Заказ

---

Издательство ДВГТУ, 690950, Владивосток, ул. Пушкинская, 10  
Типография издательства ДВГТУ, 690950, Владивосток, ул. Пушкинская 10.